



Étude et approches stochastiques du problème à n corps: application à la multifragmentation nucléaire

A. Guarnera

► To cite this version:

A. Guarnera. Étude et approches stochastiques du problème à n corps: application à la multifragmentation nucléaire. Physique Nucléaire Expérimentale [nucl-ex]. Université de Caen, 1996. Français. <in2p3-00008713>

HAL Id: in2p3-00008713

<http://hal.in2p3.fr/in2p3-00008713>

Submitted on 1 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Caen

THESE

présentée
par



FR9701044

Alfio GUARNERA

pour obtenir

**le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE CAEN**

sujet:

**Etude des approches stochastiques du problème à N corps:
application à la multifragmentation nucléaire**

soutenue le 9 Juillet 1996 devant le jury composé de:

Monsieur	S. Ayik	Rapporteur
Monsieur	Ph. Chomaz	
Monsieur	M. Di Toro	
Monsieur	B. Remaud	Rapporteur
Monsiuer	P. Schuck	
Monsieur	B. Tamain	Président

Résumé

Une perspective qui s'est ouverte pour la physique nucléaire dans les dernières années, avec la mise en évidence de phénomènes tels que la multifragmentation ou la vaporisation, est la possibilité d'observer une transition de phase dans la matière nucléaire. Une explication proposée de la multifragmentation est la décomposition spinodale: le passage du système à travers une zone du diagramme des phases, la région spinodale, dans laquelle la matière nucléaire n'est plus stable. Ce mémoire traite ce processus dans le cadre théorique d'une approche de champ moyen stochastique. Nous avons montré que ce type d'approche, dans laquelle la fonction de distribution à un corps peut avoir une évolution aléatoire, est capable de bien décrire des phénomènes dans lesquels corrélations et fluctuations jouent un rôle important, comme dans le cas d'une transition de phase du premier ordre. Dans le cadre d'une approche de champ moyen stochastique, nous avons montré que la production de fragments par décomposition spinodale est caractérisée par des temps typiques (de l'ordre d'une centaine de fm/c) et par des tailles typiques (autour de la masse du Néon). Nous avons montré que ces caractéristiques sont assez robustes et qu'elles ne sont pas affectées de façon importante par une éventuelle expansion du système ou par la taille finie des noyaux. Nous avons proposé de chercher de telles caractéristiques dans les partitions des fragments les plus gros. L'étude et la comparaison avec les données expérimentales, effectuées pour les réactions $\text{Xe} + \text{Cu}$ à 45 MeV/A et $\text{Xe} + \text{Sn}$ à 50 MeV/A, ont montré un très bon accord qui est d'autant plus remarquable que les théories que nous avons développées ne contiennent aucun paramètre ajustable. Ces résultats constituent une indication forte sur la possibilité d'observer une décomposition spinodale dans les noyaux.

Abstract

In the last decade nuclear physics research has found, with the observation of phenomena such as multifragmentation or vaporization, the possibility to get a deeper insight into the nuclear matter phase diagram. For example, a spinodal decomposition scenario has been proposed to explain the multifragmentation: because of the initial compression, the system may enter a region, the spinodal zone, in which the nuclear matter is no longer stable, and so any fluctuation leads to the formation of fragments. This thesis deals with spinodal decomposition within the theoretical framework of stochastic mean field approaches, in which the one-body density function may experience a stochastic evolution. We have shown that these approaches are able to describe phenomena, such as first order phase transitions, in which fluctuations and many-body correlations play an important role. In the framework of stochastic mean-field approaches we have shown that the fragment production by spinodal decomposition is characterized by typical time scales of the order of 100 fm/c and by typical size scales around the Neon mass. We have also shown that these features are robust and that they are not affected significantly by a possible expansion of the system or by the finite size of nuclei. We have proposed as a signature of the spinodal decomposition some typical partition of the largest fragments. The study and the comparison with experimental data, performed for the reactions $\text{Xe} + \text{Cu}$ at 45 MeV/A and $\text{Xe} + \text{Sn}$ at 50 MeV/A, have shown a remarkable agreement. Moreover we would like to stress that the theory does not contain any adjustable parameter. These results seem to give a strong indication of the possibility to observe a spinodal decomposition of nuclei.

Mots-clés

Collision entre ions lourds
Multifragmentation
Décomposition spinodale
Instabilités

Champ moyen stochastique
Equation de Boltzmann-Langevin
Fluctuations
Réponse linéaire

Etude

des approches stochastiques

du problème à N corps:

application

à la multifragmentation nucléaire

Remerciements

Il y a plus de trois ans, ma vie en France commençait. Grâce à l'appui de l'ancienne direction du GANIL et subventionné par une bourse CEA/CIES, je commençai ma thèse à l'université de Caen. Je remercie donc Samuel Harar et Daniel Guerreau pour l'opportunité qui m'a été donnée, aussi bien que la nouvelle direction du GANIL, notamment Jérôme Fouan, pour m'avoir permis de mener à terme mon travail de thèse dans les meilleures conditions.

Je tiens aussi à remercier les personnes qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse: le président, Bernard Tamain, les rapporteurs, Sakir Ayik et Bernard Remaud ainsi que Peter Schuck et Massimo Di Toro, pour la lecture attentive du mémoire et pour l'intérêt montré pour mon travail. Au dernier je voudrais envoyer un grand merci pour la sympathie et la participation avec lesquelles il a toujours suivi mes études dès les années à l'université de Catane aussi bien que pour les nombreuses invitations à venir travailler au LNS.

Arrivé en France, ma connaissance très limitée de la langue et ma naturelle timidité auraient pu devenir un grand obstacle à mon insertion dans ce "nouveau monde"; mais la présence de deux personnes a été fondamentale dans cette phase, comme dans la suite: celle de Philippe Chomaz, mon directeur de thèse, et celle de Maria Colonna, ma plus chère amie et collaboratrice, devenue ma femme.

A Philippe je dois beaucoup plus que des remerciements; dans ce trop peu de lignes je peux juste lui adresser toute ma gratitude et ma reconnaissance pour tout ce qu'il a pu faire pour moi et exprimer ma grande admiration pour les qualités d'homme et de physicien - orgueil scientifique, honnêteté et rigueur intellectuelle - qui lui sont propres.

Maria a représenté mon esprit critique. Sa constante attention aux détails a constitué une poussée forte à toujours mieux comprendre et un frein aux enthousiasmes faciles. De plus sa présence quotidienne à mes côtés a été déterminante pour l'équilibre qu'elle a apporté dans ma vie.

Parmi les autres personnes avec lesquelles j'ai eu l'opportunité de travailler je veux remercier Jørgen Randrup, qui, entre autres, m'a donné la possibilité d'une "expérience américaine" à Berkeley, et Bertrand Jacquot, à qui je souhaite toute la fortune que sa préparation et ses capacités méritent.

Je voudrais aussi citer la collaboration Indra, en particulier Nathalie Marie et Jean-Pierre Wieleczko, et la collaboration Multics, pour m'avoir permis d'effectuer une comparaison avec des données expérimentales, et Dominique Durand et Olga Shapiro, pour m'avoir permis d'utiliser leurs codes.

Si ces trois années se sont déroulées sans difficulté majeure, le mérite va sûrement à toutes les personnes, surtout des étudiants, que j'ai eu la chance de rencontrer au GANIL et qui ont créé une ambiance unique d'amitié et de bonne humeur. Entre travail et fêtes, pauses-café et rédaction (souvent nocturne) des thèses, jus d'orange partagés et fichiers postscript "travaillés", marchés du dimanche et séminaires du mardi, cyclotrons gravitationnels et cadeaux kitchs, appréhensions communes et soutenances réussies, je revois les visages de ces personnes qui resteront toujours dans mon souvenir: Bernd, Bertrand, Mylène, Olivier, Marielle, Nathalie, Marion, Patricia, Philippe, Pierre, Lauriane, Cristina, Giuseppe, Vito, Olivier, David, Mieko, Carlos, Stéphanie, Jean-Marc, Line, Xavier, Nathalie. Sans oublier Annick, Christine, Monique, Yann, Arnaud, Abdou, Wolfi, Laurent, Gines, Jean-Pierre, Etienne, Christelle, Adil et tous ceux qui j'ai eu le plaisir de fréquenter.

Personne ne m'en voudra si j'écris quelques mots à part pour Lola et Pepe. Leur amitié "especial" est la preuve que la différence de langue et de culture ne constitue pas un obstacle pour que des esprits semblables puissent se rencontrer.

Dans quelques jours je serai de nouveau "chez moi" en Sicile, mais une partie de moi restera au Ganil et, en errant dans les couloirs, cherchera des visages connus qu'elle ne retrouvera pas.

Une saison heureuse est terminée.

Caen, le 18 juillet 1996

Alf. Spanier

...à Maria
...à ma famille

Table des matières

1	La multifragmentation	1
1.1	Introduction	1
1.2	Les modèles de multifragmentation	3
1.3	L'équation d'état et la décomposition spinodale	5
2	Les approches stochastiques de champ moyen	9
2.1	Introduction: le mouvement brownien	9
2.1.1	L'équation de Langevin	10
2.1.2	Théorème de fluctuation-dissipation	13
2.1.3	L' équation de Fokker-Planck	15
2.2	L' équation de Boltzmann	18
2.3	La hiérarchie BBGKY	20
2.3.1	L'équation de Vlasov	22
2.4	Le cas (nucléaire) des fermions	23
2.4.1	Les approximations semi-classiques	24
2.4.2	Au delà du champ moyen	25
2.5	L'équation de Boltzmann - Langevin	26
2.5.1	La fonction de corrélation (terme de Langevin)	28
2.5.2	Nombre de collisions fluctuant	30
2.5.3	Equation de Fokker-Plank pour la distribution des densités à un corps	35
2.6	Théorie de la réponse linéaire	37
2.7	La relation de dispersion	37
2.8	Réponse à un bruit	40
2.9	Réponse linéaire et instabilités	42
2.10	Prédiction de la réponse linéaire pour la matière nucléaire	43

2.10.1	Fluctuations et coefficient de diffusion	45
3	Les méthodes numériques	49
3.1	Les simulations sur réseau	49
3.2	Une simulation BUU rapide et fiable: le code TWINGO	51
3.3	Méthodes d'introduction du bruit	55
3.3.1	Bruit dans les conditions initiales: méthodes TNT et SIM	55
3.3.2	La dynamique brownienne à un corps (BOB)	57
4	Les études théoriques des approches stochastiques	63
4.1	Approches stochastiques et instabilités spinodales	64
4.2	Instabilités spinodales et expansion	69
4.2.1	Cas unidimensionnel	69
4.2.2	Généralisation à toute dimension	70
4.2.3	Réponse linéaire	72
4.2.4	Simulations à 2D d'un système en expansion	76
4.3	Instabilités spinodales et systèmes finis	81
4.4	Instabilités spinodales et chaos	83
5	La décomposition spinodale et les instabilités dans les noyaux	93
5.1	Relation de dispersion d'un système réaliste fini	93
5.1.1	Les effets de taille	98
5.1.2	Les effets de forme	102
5.2	La distribution de masse	105
5.3	Vers des observables exclusives	108
5.4	Application de la méthode BOB au cas tridimensionnel	110
5.5	La comparaison avec les données expérimentales	112
5.5.1	La réaction $Xe + Cu$ à 45 MeV par nucléon	112
5.5.2	La réaction $Xe + Sn$ à 50 MeV par nucléon	119
5.6	Instabilités de col	127
5.6.1	Instabilités et dynamique	127
5.6.2	Les résultats des simulations	129
6	Conclusions	137
•	Bibliographie	143

Chapitre 1

La multifragmentation

1.1 Introduction

La connaissance de l'équation d'état de la matière dans des conditions extrêmes de densité, température et pression est l'une des grandes questions posées à la physique nucléaire. Cette équation d'état joue, par exemple, un rôle important en astrophysique, car elle permet d'aborder des problématiques liées à la dynamique du big-bang; elle détermine l'évolution interne des étoiles massives durant leur effondrement gravitationnel, et l'explosion des supernovæ et la formation des étoiles à neutron est liée à la compressibilité de la matière nucléaire à haute température. Les collisions entre ions lourds constituent un moyen très efficace pour explorer ces états extrêmes de la matière nucléaire et donc peuvent devenir un outil important pour l'étude des propriétés de son équation d'état.

Les comportements observés dans les collisions d'ions lourds dépendent de l'énergie du faisceau et du paramètre d'impact. Limitons-nous, pour l'instant, à considérer les collisions centrales. A faible énergie du faisceau (typiquement inférieure à 30 MeV par nucléon), un gros résidu est détecté ainsi que des particules légères. A des énergies du faisceau très hautes (supérieures typiquement à 100 MeV par nucléon) le système se "vaporise" dans un gaz de nucléons. Entre ces deux extrêmes se situe un régime dans lequel un grand nombre de fragments de masse intermédiaire (IMF) est observé. On parle alors de multifragmentation.

Le scénario qui rencontre le consensus le plus large est que, à basse énergie, un noyau composé est formé oscillant autour de la densité de saturation et se refroidissant par émission de particules. A des énergies plus hautes, par contre, il y aurait formation de régions à haute température et, éventuellement, à haute densité qui ensuite se dilatent. Si la dilatation est suffisamment forte, elle peut arriver à casser le système en une multitude de noyaux (multifragmentation) ou de nucléons (vaporisation).

1.1 Introduction

Il est particulièrement intéressant de savoir pourquoi et comment les noyaux se désagrègent à des énergies suffisamment élevées et notamment de comprendre si cette désagrégation se produit dans des circonstances bien précises que l'on pourrait définir en termes de transitions de phase. Pour le moment, en dépit des efforts faits aussi bien du côté théorique que du côté expérimental, la complexité du processus n'a pas encore permis de fournir des réponses satisfaisantes aux questions posées.

Du point de vue théorique une description réaliste des collisions nécessite le développement d'approches dynamiques microscopiques permettant de décrire la décomposition du système et de faire un lien avec l'équation d'état. En fait, n'importe quel point de l'équation d'état n'est pas forcément accessible du point de vue dynamique, son accessibilité dépendant fortement des ingrédients utilisés pour fixer la condition initiale et pour suivre l'évolution du système.

Le régime d'énergies que nous sommes en train de considérer est un régime transitoire entre les basses énergies, proches de la barrière coulombienne, dominées par le champ moyen nucléaire, et les hautes énergies dominées par les collisions nucléon-nucléon. Une bonne description de ces deux régimes est obtenue respectivement par des calculs de champ moyen quantiques du type Hartree-Fock dépendant du temps (TDHF) [Bon76, Neg82], pour les basses énergies, et de calculs classiques de cascade intranucléaire (INC) [Cug81], pour les hautes. Dans les années 80, dans le but d'étudier les collisions entre ions lourds aux énergies intermédiaires, ces deux aspects ont été réunis dans des approches semi-classiques prenant en compte le champ moyen et un terme de collision analogue à l'équation de Boltzmann pour les fermions (connue aussi sous le nom d'équation de Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck) [Ber88, Nor28, Ueh33]. Ces approches semi-classiques préservent une propriété quantique: la statistique fermionique. Dans ces approches, le système est décrit par la fonction de densité à un corps: chaque particule est considérée indépendante et bouge dans le champ moyen créé par toutes les autres.

Toutefois, en procédant de cette façon, nous avons projeté l'ensemble des informations contenues dans le problème initial à N corps sur le sous-espace des observables à un corps, avec un nombre réduit de degrés de liberté, et nous avons donc perdu un certain nombre d'informations (appelées corrélations). Seulement leur effet moyen est pris en compte par le terme de collision de type Boltzmann. Ces corrélations peuvent devenir très importantes dans des situations, comme c'est le cas de la multifragmentation, dans lesquelles les fluctuations ont un rôle très important.

Il faut donc aller au-delà des approches à un corps. A la fin des années '80 il a été proposée de simuler certains effets des corrélations en faisant subir à la fonction de distribution à un corps une évolution aléatoire, en analogie avec le mouvement brownien d'une particule dans un fluide: nous avons à faire avec la

théorie des approches stochastiques de type Boltzmann-Langevin [Ayi88, Ran90].

Ce travail de thèse essaie d'apporter une contribution à la compréhension du phénomène de la multifragmentation nucléaire dans le cadre des approches stochastiques de champ moyen. Dans la suite de ce chapitre, nous introduirons un lien possible entre le processus de fragmentation et le diagramme de phase de la matière nucléaire. Notamment, nous expliquerons comment le passage du système à travers une région du diagramme de phase dans laquelle la matière nucléaire n'est plus stable (la région spinodale) peut entraîner sa fragmentation. La formation de fragments par "décomposition spinodale" serait alors due à l'amplification des instabilités ressenties par le système dans cette région. Dans le deuxième chapitre, nous expliquerons l'approche théorique avec lequel la décomposition spinodale est traitée. Il s'agit d'une approche dynamique de type Boltzmann-Langevin, c'est-à-dire une approche de champ moyen complétée par la prise en compte des fluctuations, qui dans le cas de systèmes instables peuvent devenir très importantes. La partie finale de ce deuxième chapitre est dédié à l'étude, dans le cadre de la réponse linéaire, de la propagation des fluctuations dans des systèmes infinis instables et de l'amplitude des fluctuations associées aux termes stochastiques de la théorie de Boltzmann-Langevin. Les méthodes utilisées pour simuler l'équation de Boltzmann-Langevin sont décrites dans le chapitre 3. Dans le chapitre 4 nous discuterons de la validité et de la possibilité d'utiliser des méthodes stochastiques de champ moyen pour la problématique que nous sommes en train de traiter. En particulier les rôles de l'expansion [Col95a], de la taille finie du système [Col96a], du chaos et des non-linéarités [Jac95, Jac96b] seront étudiés en détail et une vérification de la méthode dans un cas soluble exactement (classique) [Jac96a] sera présentée. Tous ces calculs ont été effectués à deux dimensions. L'application de la méthode au cas réaliste d'un noyau [Gua96a] aussi bien que la comparaison avec les données expérimentales pour les réactions $Xe + Cu$ à 45 MeV par nucléon et $Xe + Sn$ à 50 MeV par nucléon [Gua96b] sont finalement montrées dans le chapitre 5. Dans le même chapitre un exemple de l'application des méthodes stochastiques de champ moyen pour des collisions semiperipheriques, dans le but d'étudier les "instabilités de col", est aussi présenté [Col95b].

1.2 Les modèles de multifragmentation

Ce paragraphe ne veut pas être une revue exhaustive de l'ensemble des modèles théoriques utilisés dans le domaine de la multifragmentation, pour laquelle nous renvoyons le lecteur aux références [Mor93, Bon95, Gro90], mais une introduction au débat présent concernant le phénomène. A l'heure actuelle essentiellement deux types d'approches sont suivis pour expliquer la multifragmentation: les théories statistiques d'un côté et les théories dynamiques de l'autre. Les ap-

1.2 Les modèles de multifragmentation

proches de type statistique peuvent être vues comme des extensions naturelles des théories décrivant la fission. La production des fragments pourrait, dans ces approches, être expliquée par une séquence de cassures binaires (probablement plus plausible à basse énergie) ou par une explosion quasi-instantanée (à plus haute énergie), l'idée étant que, dans chacun des cas, toutes les voies possibles de décroissance sont également peuplées.

Parmi les différentes approches de ce type proposées [Lop89, Fri83, Bon85, Gro90, Koo87], le code développé par Gross et collaborateurs (connu aussi comme le code de Berlin) [Gro83, Gro90, Gro92] est parmi les plus sophistiqués. Dans cette approche, on considère un système de particule et de noyaux isolés dans un volume fixé, supérieur au volume du noyau de masse et de charge totale équivalente, et interagissant par l'intermédiaire de l'interaction coulombienne. Le système est supposé être en équilibre et constitue un ensemble microcanonique fini. Les partitions en masse, en charge, en énergie et en moment total sont générées par un algorithme de Metropolis qui simule les conditions initiales. L'évolution spatiale du système à partir des configurations ainsi définies est gouvernée par l'interaction coulombienne agissant entre les fragments. Ce modèle est capable de reproduire des distributions de masse aussi bien que d'autres observables plus exclusives. Néanmoins, il contient un certain nombre de faiblesses (d'ailleurs partagées par les autres modèles de multifragmentation statistique) : il ne tient pas compte des effets dynamiques du processus de formation (effet de déformation, compression); il suppose l'existence d'un équilibre thermodynamique des différentes partitions du système. Surtout, dans ce modèle le choix de la forme et du volume de la région dans laquelle l'équilibre est calculé devient d'importance critique et devrait être justifié.

De l'autre côté, il y a les approches dynamiques. Le prototype de ces approches est la théorie d'Hartree-Fock dépendant du temps (TDHF) [Bon76, Neg82], utilisée avec un certain succès pour la description des collisions entre ions lourds à basse énergie. Dans le but d'améliorer ces traitements, beaucoup d'efforts ont été faits, dans la limite semi-classique, pour inclure un terme de collision, essentiel aux énergies plus hautes. Ces efforts ont abouti à l'équation de Vlasov complétée par un terme de collision à la Boltzmann [Ber88, Nor28, Ueh33]. Les différents codes capables de résoudre numériquement cette équation ont permis de calculer avec succès l'évolution de nombreuses observables, comme le transfert de moment, les spectres inclusives des particules,... La limite de ces approches est qu'elles ne permettent de calculer que l'évolution moyenne de ces observables et ne tiennent pas compte des fluctuations et des corrélations à plusieurs corps.

Il y a des situations physiques dans lesquelles la prise en compte des fluctuations est nécessaire pour avoir une description correcte du système. La multifragmentation est un de ces cas. En fait, si on considère une collision centrale, il y a initialement une symétrie cylindrique qui n'existe plus pour les fragments

détectés. Dans les calculs, il faut donc pouvoir briser cette symétrie. Toutefois l'équation de Boltzmann la préserve.

Il est donc nécessaire d'aller au-delà de l'équation de Boltzmann. Pour cela il y a actuellement deux possibilités. La première est d'essayer de résoudre le problème à N corps au moyen d'une dynamique où les nucléons sont localisés soit de façon purement classique [Len90, Lat94, Pra95, Dor87, Aic91, Pei92, Boa88] soit, de façon plus sophistiquée, en introduisant le caractère fermionique des nucléons par une antisymétrisation explicite de la fonction d'onde [Fel90, Ono92, Col96b].

La deuxième est d'améliorer les approches à un corps TDHF et BUU en introduisant des extensions stochastiques de ces équations de transport. Ces modèles sont connus sous le terme d'approches de type Boltzmann-Langevin [Ayi88, Ayi90, Ran90]. C'est la voie que nous avons suivie dans notre travail.

1.3 L'équation d'état et la décomposition spinodale

L'équation d'état d'un système est la relation qui lie les paramètres définissant son état d'équilibre thermodynamique. Par exemple, dans le cas des fluides réels (gaz ou liquides) on peut caractériser le système par sa pression P , sa densité ρ et sa température T qui sont reliés par une équation d'état qui peut être approchée par la relation de van der Waals [Waa73]

$$\left(P + a \frac{N^2}{V^2}\right)(V - bN) = NkT.$$

Les paramètres a et b peuvent être reliés respectivement [Diu89] à la partie attractive à longue portée et répulsive à courte portée de l'interaction entre les molécules que l'on peut modéliser par exemple par un potentiel à la Lennard-Jones du type

$$U(r) = V_0 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \right]$$

où V_0 et r_0 sont des paramètres microscopiques caractéristiques de l'interaction intermoléculaire.

Donc l'équation d'état d'un système reflète les interactions élémentaires entre ses constituants. Nous savons que l'interaction nucléon-nucléon contient un terme dominant répulsif à courte portée ($\leq 0.5 fm$) et attractif à plus longue portée ($\geq 0.8 fm$). Cette forme, analogue à celle d'un potentiel moléculaire de type Lennard-Jones suggère que l'équation d'état d'un système infini de nucléons est voisine de celle d'un gaz de van der Waals. Cette analogie nous donne en première

1.3 L'équation d'état et la décomposition spinodale

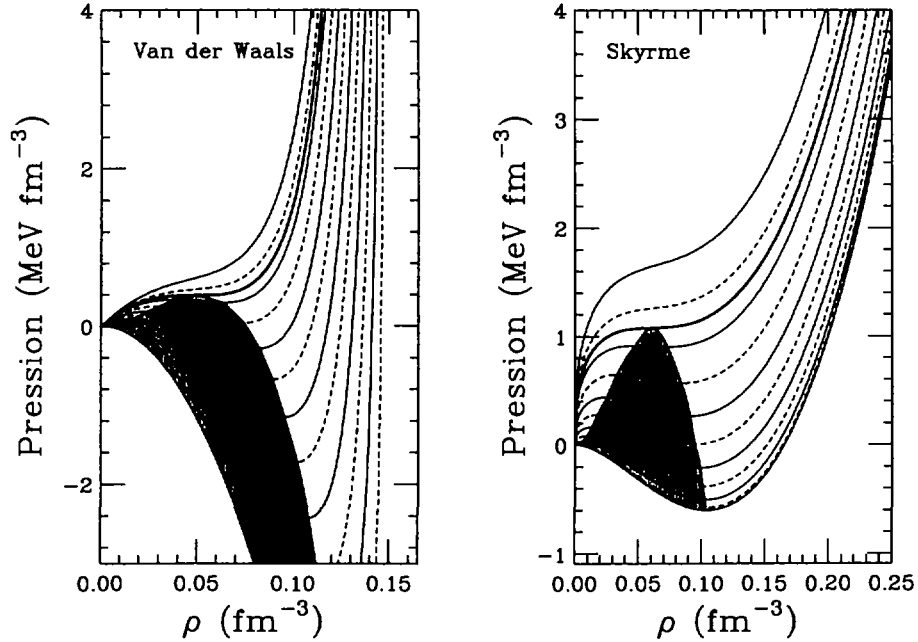


Figure 1.1: Comparaison d'une équation d'état de type van der Waals (à gauche) avec une équation d'état nucléaire phénoménologique de type Skyrme (à droite). Un réseau d'isothermes, dans le plan pression-densité, à partir de la température 0 et à tous les 2 MeV, est présenté. L'isotherme plus épaisse correspond à la température critique, en dessous de laquelle deux phases liquide et gazeuse existent. Dans le cas de l'équation d'état nucléaire elle est de 17 MeV. Le point de saturation correspond au point ayant pression et température nulles. Enfin, la partie grisée est la région mécaniquement instable: la région spinodale.

approximation la forme générale de l'équation d'état nucléaire. Sur la figure (1.1) nous présentons (à gauche) l'équation d'état de van der Waals pour des valeurs particulières de a et b et (à droite) l'équation d'état de la matière nucléaire infinie obtenue avec une force effective du type Skyrme [Sky56, Vau72]

$$U(\rho) = A \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + B \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\sigma.$$

L'analogie entre les deux équations d'état est claire. Cette analogie suggère la possibilité de la coexistence des phases liquide et gaz. La phase dense liquide pourrait correspondre aux noyaux et la phase gazeuse aux nucléons libres. Il est aussi possible de définir pour l'équation d'état nucléaire aussi bien que pour l'équation d'état des gaz une région (indiquée en grisé sur les figures) dans laquelle la dérivée de la pression par rapport à la densité est négative. Dans cette région, qui est appelée spinodale, la matière est mécaniquement instable, car les fluctua-

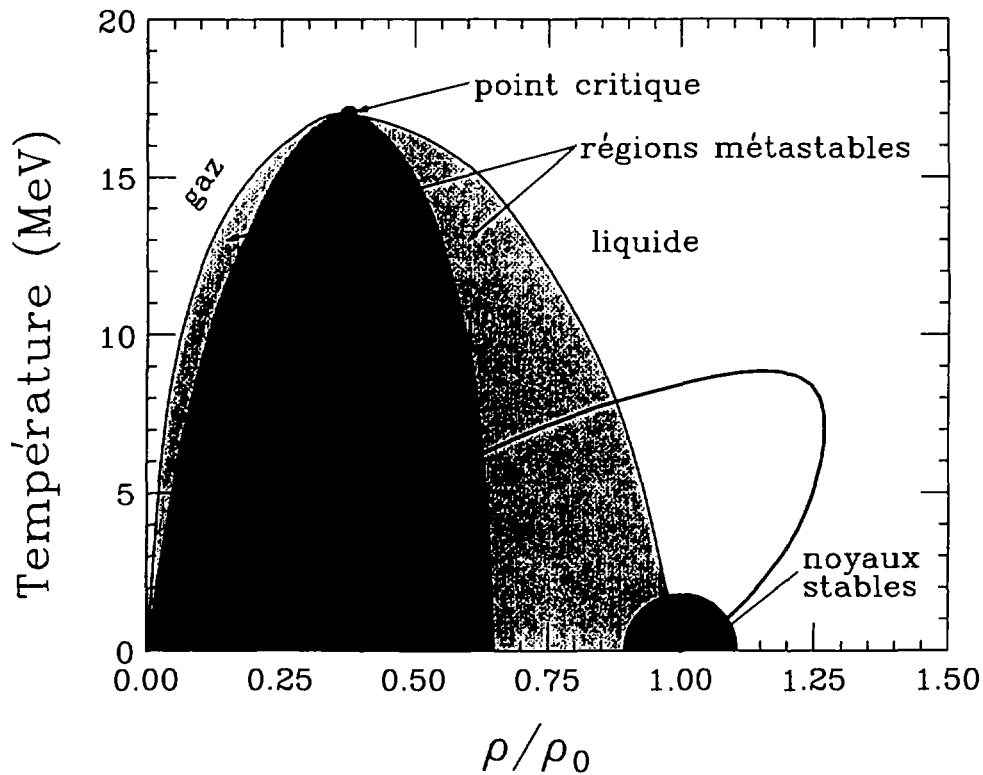


Figure 1.2: Evolution possible de la matière nucléaire pendant une collision entre ions lourds dans le plan densité-température: à partir des noyaux stables une région à haute densité et très comprimée est formée. Ensuite le système se dilate et se refroidit, en rejoignant ainsi dynamiquement la région spinodale où il se décomposera en fragments.

tions de densité sont amplifiées, en conduisant éventuellement à la formation de fragments.

L'approche que nous nous proposons d'étudier en détail pour expliquer la multifragmentation s'appuie sur le concept d'instabilité spinodale (ou de volume). Ce mécanisme fut proposé en 1983 par Bertsch et Siemens [Ber83]. L'image de l'instabilité spinodale est attrayante parce qu'elle lie directement la dynamique et l'équation d'état: le système, initialement comprimé et chaud à cause de la collision, se dilate et pénètre la région instable dans laquelle les fluctuations s'amplifient et conduisent à la formation des fragments (voir la figure (1.2)).

Chapitre 2

Les approches stochastiques de champ moyen

2.1 Introduction: le mouvement brownien

Il arrive parfois qu'une goutte d'eau soit emprisonnée dans un morceau de lave lors du refroidissement de celle-ci. Au début du XIX^e siècle le botaniste écossais Robert Brown découvrit une telle goutte dans un morceau de quartz; cette goutte d'eau était restée intacte pendant des millions d'années et aucune spore ni aucun pollen portés par le vent et la pluie n'avaient pu la contaminer. Il examina la goutte d'eau à l'aide d'un microscope: suspendues dans l'eau, un grand nombre de particules minuscules étaient animées d'un mouvement irrégulier et incessant. Ce mouvement était familier à Brown: il l'avait déjà observé pour des grains de pollen en suspension dans l'eau. Cette nouvelle expérience rendait caduque son explication antérieure du phénomène, à savoir que "la vitalité est conservée par les "molécules" d'une plante longtemps après la mort de la plante et que ces molécules "vivaient" puisqu'elles bougeaient". Brown conclut alors [Bro28], à juste titre, que l'agitation des particules emprisonnées à l'intérieur du quartz devait être un phénomène plus physique que biologique, mais il n'alla pas plus loin dans son raisonnement.

L'explication de ce mouvement, que l'on appelle aujourd'hui brownien, est maintenant bien connue, grâce surtout aux travaux d'Einstein [Ein05, Ein06]: un grain de pollen ou de poussière suspendu dans un fluide est soumis à un bombardement incessant par les molécules qui constituent le fluide. La quantité de mouvement d'une molécule isolée n'est jamais suffisamment importante pour que son effet sur la particule en suspension soit visible au microscope. Cependant,

2.1 Introduction: le mouvement brownien

si un grand nombre de molécules frappent en même temps la particule du même côté, elles peuvent déplacer celle-ci de façon notable.

Par conséquent, le mouvement brownien est un double phénomène aléatoire: le trajet de la particule suspendue est rendu aléatoire par les fluctuations aléatoires des vitesses des molécules voisines.

Le mouvement brownien révèle très clairement les fluctuations statistiques dans un système à l'équilibre thermique. Il y a un grand nombre de situations qui sont similaires: par exemple, le mouvement aléatoire d'un miroir suspendu sur le fil d'un galvanomètre, ou les courants fluctuants présents dans une résistance électrique. Donc le mouvement brownien peut être considéré comme un problème typique dont l'analyse permet une meilleure vision des mécanismes responsables de l'existence de fluctuations et de dissipation d'énergie.

2.1.1 L'équation de Langevin

Pour des raisons de simplicité, considérons le problème du mouvement brownien à *une* dimension. Considérons une particule de masse m dont la position du centre de masse au temps t est indiquée par $x(t)$ et dont la vitesse correspondante est $v(t)$. Cette particule est immergée dans un fluide à la température absolue T . Essayer de décrire les interactions du centre de masse avec tous les autres degrés de liberté du système différents de x est une tâche presque sans espoir. Toutefois, ces autres degrés de liberté peuvent être regardés comme s'ils constituaient un bain thermique à la température T et leurs interactions avec x peuvent être introduites comme une force effective $F(t)$. La particule peut aussi interagir avec un système extérieur, comme la gravité ou un champ électromagnétique, par une force dénotée par $\mathcal{F}(t)$. La vitesse v de la particule peut, en général, être différente de sa valeur moyenne à l'équilibre. Si on se concentre sur l'évolution de la coordonnée du centre de masse, la II^e loi de Newton nous donne:

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F}(t) + F(t). \quad (2.1)$$

Dans cette équation, on connaît très peu de choses sur la force $F(t)$ qui décrit l'interaction de x avec les autres degrés de liberté du système. Essentiellement, $F(t)$ doit dépendre de la position des nombreux atomes qui sont en mouvement constant. Donc $F(t)$ est une fonction très rapidement variable dans le temps et, en effet, on ne peut pas spécifier de façon exacte la dépendance de $F(t)$ par rapport au temps.

Pour avancer, on peut considérer un traitement statistique du problème. Cela veut dire qu'il faut considérer un ensemble de systèmes préparés de la même façon, chacun constitué de la particule et du fluide qui l'entoure. Pour chacun d'eux la force $F(t)$ est une fonction aléatoire de t . La fréquence avec laquelle $F(t)$ varie

peut être caractérisée par un “temps de corrélation” ou “temps de collision” τ_{co} qui mesure grossièrement le temps moyen entre deux maxima (ou minima) de la fonction fluctuante $F(t)$. Ce temps τ_{co} doit être plutôt petit sur une échelle *macroscopique*. En outre, si on considère une situation dans laquelle la particule est à l’arrêt, alors il n’y a pas de direction privilégiée dans l’espace; donc $F(t)$ doit pouvoir être aussi souvent positive que négative, de sorte que la moyenne d’ensemble $\bar{F}(t)$ soit nulle.

L’équation (2.1) est valide pour chaque membre de l’ensemble et nous voulons maintenant essayer de déduire à partir d’elle les propriétés statistiques de v . Etant donné que $F(t)$ varie très rapidement avec le temps, il est évident, à partir de l’équation (2.1), que v fluctue aussi avec le temps. Mais la dépendance de v avec le temps peut aussi présenter une évolution plus lente. Par exemple, on peut focaliser notre attention sur la vitesse \bar{v} moyennée sur l’ensemble, qui est une fonction qui varie encore plus lentement que v avec le temps, et écrire:

$$v = \bar{v} + v' \quad (2.2)$$

où v' représente la partie de v qui varie rapidement (mais toujours moins rapidement de $F(t)$, étant donné la masse élevée de la particule) et dont la valeur moyenne est nulle. La partie lentement variable \bar{v} est très importante (même si elle est petite) parce qu’elle détermine le comportement de la particule sur des longues périodes de temps. Pour étudier ce comportement, intégrons l’équation (2.1) sur un intervalle τ qui est petit sur une échelle *macroscopique*, mais grand devant τ_{co} . On obtient:

$$m[v(t + \tau) - v(t)] = \mathcal{F}(t)\tau + \int_t^{t+\tau} F(t')dt' \quad (2.3)$$

où on a supposé que la force externe \mathcal{F} varie assez lentement pour ne pas changer de façon notable pendant le temps τ . Le dernier terme dans l’équation (2.3) devrait être très petit car $F(t)$ change de signe plusieurs fois pendant le temps τ . On pourrait donc s’attendre à ce que la partie lentement variable de v soit juste due à la force externe \mathcal{F} ; c’est-à-dire que l’on serait tenté d’écrire:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \mathcal{F}. \quad (2.4)$$

Mais cet ordre d’approximation est trop grossier pour décrire la situation physique. En effet, l’interaction avec le milieu exprimée par $F(t)$ doit être telle qu’elle amène toujours la particule vers l’équilibre. Supposons, par exemple, que la force externe $\mathcal{F} = 0$. L’interaction exprimée par F doit alors être telle que, si $\bar{v} \neq 0$ à un certain temps initial, elle fait approcher progressivement \bar{v} vers sa valeur à l’équilibre $\bar{v} = 0$. Mais l’équation (2.4) n’arrive pas à prédire ce type de comportement. La raison de cela est le fait que nous avons été trop négligents dans la façon de traiter les effets de F dans la relation (2.3). En particulier nous n’avons pas considéré le

2.1 Introduction: le mouvement brownien

fait que la force F doit en réalité être affectée par le mouvement de la particule et qu'elle doit contenir une partie lentement variable \bar{F} conduisant la particule vers l'équilibre. Donc, nous allons écrire, de façon analogue à la relation (2.2),

$$F = \bar{F} + F' \quad (2.5)$$

où F' est la partie rapidement fluctuante de F dont la valeur moyenne est nulle. La partie qui varie très lentement \bar{F} doit être une fonction de \bar{v} telle que $\bar{F}(\bar{v}) = 0$ à l'équilibre, quand $\bar{v} = 0$. Si \bar{v} n'est pas trop grand, $\bar{F}(\bar{v})$ peut être développée en série en \bar{v} dont le premier terme non nulle doit être linéaire en \bar{v} . Donc \bar{F} doit avoir la forme générale:

$$\bar{F} = -\alpha\bar{v}$$

où α est une constante positive (appelée “constante de viscosité”) et où le signe moins indique explicitement que la force \bar{F} agit de façon à faire tendre \bar{v} vers zéro. Pour l'instant on ne peut rien dire sur la valeur de α . Nous pouvons cependant supposer que α doit être de quelque façon lié aux propriétés de F , car la force de frottement est provoquée par l'interaction décrite par $F(t)$.

Dans le cas général la partie lentement variable de la relation (2.1) devient donc

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \mathcal{F} + \bar{F} = \mathcal{F} - \alpha\bar{v}. \quad (2.6)$$

Si on inclut les parties rapidement variables v' et F' des équations (2.2) et (2.5), la relation (2.6) peut être écrite

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F} - \alpha v + F'(t) \quad (2.7)$$

où nous avons mis $\alpha\bar{v} \approx \alpha v$ avec une erreur négligeable à l'ordre considéré. L'équation (2.7) est appelée “équation de Langevin” [Lan08]. Elle diffère de l'équation de départ (2.1), car ici la force est explicitement décomposée en une partie lentement variable $-\alpha v$ et une partie fluctuante $F'(t)$ qui est “purement aléatoire”, c'est-à-dire telle que sa valeur moyenne s'annule indépendamment de la vitesse ou de la position de la particule. De cette façon, l'équation de Langevin (2.7) permet de décrire le comportement de la particule à tous les temps dès que les conditions initiales sont spécifiées.

Comme l'équation de Langevin contient la force de frottement $-\alpha v$, ceci implique l'existence de processus dans lesquels l'énergie associée avec la coordonnée x de la particule est dissipée vers les autres degrés de liberté. Ceci est en accord avec notre connaissance du monde macroscopique dans lequel les forces de frottement sont communes. Néanmoins, on traite ici un exemple d'un problème général intéressant et conceptuellement difficile. Considérons un système A en contact avec un bain thermique B. Les équations *microscopiques* qui règlent le mouvement du système combiné (A+B) n'incluent aucune dissipation et donc

aucune force de frottement. L'énergie totale est conservée et le mouvement de A et B est réversible. Mais si nous focalisons notre attention sur A, son interaction avec le bain thermique B peut être convenablement décrite par des équations du mouvement qui contiennent des forces de frottement. Il y a donc dissipation d'énergie de A vers le réservoir B et le mouvement de A seul n'est pas réversible.

2.1.2 Théorème de fluctuation-dissipation

Afin d'avoir une meilleure compréhension des forces de frottement, considérons à nouveau l'équation (2.1) et essayons de l'analyser plus en détail. Reprenons un temps τ macroscopiquement petit mais grand sur une échelle microscopique, de façon que

$$\tau \gg \tau_{co}$$

(nous rappelons que τ_{co} est le temps de corrélation qui est de l'ordre de la période moyenne des fluctuations de la force $F(t)$.) Supposons aussi que la force externe \mathcal{F} varie lentement et regardons la partie lentement variable de la vitesse v . Focalisons notre intérêt sur un ensemble de systèmes préparés de façon similaire et évoluant suivant l'équation (2.1). Si on considère cette équation dans la forme (2.3) et si l'on prend la moyenne d'ensemble des deux membres, on obtient

$$m \langle v(t + \tau) - v(t) \rangle = \mathcal{F}(t)\tau + \int_t^{t+\tau} \langle F(t') \rangle dt'. \quad (2.8)$$

Il nous faut donc la moyenne d'ensemble de F pour pouvoir prédire l'évolution de la vitesse moyenne.

Pour faire une analyse approchée de la situation, on peut procéder de la façon suivante. Considérons la particule décrite par la coordonnée x comme un petit système A décrit par x et les autres degrés de liberté comme un grand réservoir de chaleur B dont la température $T \equiv (\beta)^{-1}$ est essentiellement constante, indépendamment des échanges d'énergie avec A. Pour une valeur donnée de la vitesse v , considérée ici comme un paramètre, les différents états de A seront notés r ; dans un tel état, la force F aura une valeur F_r .

Supposons qu'à un certain temps t la particule ait la vitesse $v(t)$. Dans une première approximation, on peut imaginer qu'à ce temps le système est dans une situation d'équilibre dans laquelle $\langle F \rangle = 0$ et la probabilité pour A de se trouver dans un état r est dénoté par $W_r^{(0)}$. Dans l'approximation suivante il faut considérer comment $\langle F \rangle$ est affectée par le mouvement de la particule. Considérons donc la situation à un temps légèrement postérieur $t' = t + \tau'$ où la particule a une vitesse $v(t + \tau')$. Le mouvement de la particule affecte le milieu et, si τ' est suffisamment petit, la force moyenne $\langle F(t') \rangle$ dépend de la situation au temps précédent t . Et, du fait que la vitesse de la particule change, l'équilibre interne du milieu est troublé. Mais après un temps de l'ordre de τ_{co} les interactions

2.1 Introduction: le mouvement brownien

entre les molécules auront rétabli des conditions d'équilibre consistantes avec la nouvelle valeur de la vitesse $v = v(t + \tau')$. Cela signifie que le réservoir B pourra se trouver avec une probabilité égale dans un quelconque de ses Ω états accessibles. Supposons alors que dans un intervalle de temps $\tau' > \tau_{co}$ la vitesse de la particule change de la quantité $\Delta v(\tau')$ et que, en conséquence, l'énergie de B change de E' à $E' + \Delta E'(\tau')$. Le nombre d'états accessibles à B change en conséquence de $\Omega(E')$ à $\Omega(E' + \Delta E')$. Comme, dans une situation d'équilibre, la probabilité de trouver A dans un état r est proportionnelle au nombre correspondant d'états accessibles au réservoir B, il est alors possible de comparer la probabilité d'avoir la même configuration r aux temps t et $t + \tau'$. Si on dénote la dernière avec $W_r(t + \tau')$, on a simplement

$$\frac{W_r(t + \tau')}{W_r^{(0)}} = \frac{\Omega(E' + \Delta E')}{\Omega(E')} = e^{\beta \Delta E'}.$$

où $(\beta)^{-1} \equiv (\partial \ln \Omega / \partial E')^{-1}$ est la température du réservoir B. Physiquement, cela signifie que la probabilité que le système A soit dans un état donné à un certain temps postérieur est plus grande si plus d'énergie devient disponible au réservoir. Donc

$$W_r(t + \tau') = W_r^{(0)} e^{\beta \Delta E'} \approx W_r^{(0)} (1 + \beta \Delta E').$$

Au temps t' la valeur moyenne de F est donc donnée par

$$\langle F \rangle = \sum_r W_r(t + \tau') F_r = \sum_r W_r^{(0)} (1 + \beta \Delta E') F_r = \langle (1 + \beta \Delta E') F \rangle_0$$

où la dernière moyenne est calculée avec la probabilité à l'équilibre $W_r^{(0)}$. Comme $\langle F \rangle_0 = 0$, on obtient

$$\langle F \rangle = \beta \langle F \Delta E' \rangle_0 \quad (2.9)$$

qui, en général, n'est pas nul.

D'autre part, la variation d'énergie de B dans le temps $t' - t$ est simplement l'inverse du travail effectué par la force F sur la particule:

$$\Delta E' = - \int_t^{t'} v(t'') F(t'') dt'' \approx -v(t) \int_t^{t'} F(t'') dt''.$$

D'après la relation 2.9 on peut donc écrire

$$\langle F(t') \rangle = -\beta \langle F(t') v(t) \int_t^{t'} F(t'') dt'' \rangle_0 = -\beta \bar{v}(t) \int_t^{t'} dt'' \langle F(t') F(t'') \rangle_0$$

où nous avons d'abord moyenné sur $v(t)$, car la vitesse varie plus lentement que $F(t)$.

Toutes ces considérations peuvent maintenant être utilisées pour transformer l'équation (2.8), quand $\tau \gg \tau_{co}$. L'intégrale dans cette expression est calculée sur un intervalle suffisamment long tel que $\tau' = t' - t \gg \tau_{co}$ pratiquement sur tout le temps d'intégration, rendant possible de cette façon l'utilisation

de l'approximation (2.1.2) dans l'intégrande. Nous pouvons maintenant utiliser $s \equiv t'' - t'$ et écrire l'équation (2.8)

$$m \langle v(t+\tau) - v(t) \rangle = \mathcal{F}(t)\tau - \beta \bar{v}(t) \int_t^{t+\tau} dt' \int_{t-t'}^0 ds \langle F(t') F(t'+s) \rangle_0. \quad (2.10)$$

La quantité

$$K(s) = \langle F(t') F(t'') \rangle_0 = \langle F(t') F(t' + s) \rangle_0$$

est appelée “fonction de corrélation” de la fonction $F(t)$. La moyenne d'ensemble est ici considérée à l'équilibre. Donc cette moyenne est indépendante du temps t' et dépend seulement de la différence des temps s .

En utilisant la propriété $K(s) = K(-s)$ on peut écrire

$$\int_t^{t+\tau} dt' \int_{t-t'}^0 ds K(s) \approx \frac{1}{2} \tau \int_{-\infty}^{+\infty} ds K(s)$$

et donc l'équation (2.10) devient

$$m \langle v(t+\tau) - v(t) \rangle = \mathcal{F}(t)\tau - \alpha \bar{v}(t)\tau \quad (2.11)$$

où la constante α de façon explicite est

$$\alpha \equiv \frac{1}{2kT} \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) ds. \quad (2.12)$$

On peut aussi réécrire l'équation (2.11) sous la forme analogue à l'équation (2.6)

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \mathcal{F} - \alpha \bar{v}. \quad (2.13)$$

La relation (2.12), qui est souvent appelée “théorème de fluctuation-dissipation”, nous fournit une expression explicite pour la constante α en termes de la fonction de corrélation de la force fluctuante $F(t)$ à l'équilibre.

2.1.3 L' équation de Fokker-Planck

Considérons le mouvement brownien en absence de forces externes. A la place d'étudier comment la valeur moyenne de la vitesse varie avec le temps, nous pouvons nous demander comment varie la probabilité $P(v, t)dv$ que la vitesse de la particule au temps t soit entre v et $v + dv$. On peut supposer que cette probabilité ne dépende pas de toute l'histoire de la particule, mais plutôt qu'elle puisse être déterminée par la simple connaissance de la vitesse v_0 à un temps antérieur t_0 . Cette hypothèse sur l'absence d'effets de mémoire dans le système est dite “markovienne”. Donc on peut écrire P plus explicitement comme une probabilité qui dépend de v_0 et t_0 comme paramètres; i.e.:

$$P dv = P(v, t | v_0, t_0) dv$$

2.1 Introduction: le mouvement brownien

est la probabilité que la vitesse soit entre v et $v + dv$ au temps t si la vitesse était v_0 au temps antérieur t_0 . Compte tenu que rien dans ce problème ne dépend de l'origine à partir de laquelle le temps est mesuré, P peut juste dépendre des différences de temps $s = t - t_0$. Donc on peut simplement écrire

$$P(v, t|v_0, t_0)dv = P(v, s|v_0)dv.$$

Si $s \rightarrow 0$, on sait que $v = v_0$, d'où

$$\text{pour } s \rightarrow 0 \quad P(v, s|v_0) \rightarrow \delta(v - v_0).$$

D'autre part, si $s \rightarrow \infty$, la particule doit tendre vers l'équilibre avec le milieu à la température T , sans tenir compte de l'histoire passée. Alors P devient indépendant de v_0 et se réduit à une distribution canonique:

$$\text{pour } s \rightarrow \infty \quad P(v, s|v_0) \rightarrow \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta mv^2} dv.$$

On peut alors écrire une condition générale qui doit être satisfaite par la probabilité $P(v, s|v_0)$. Dans chaque petit intervalle de temps Δs , la variation de la probabilité qu'une particule ait une vitesse comprise entre v et $v + dv$ provient de deux contributions: un terme de perte et un terme de gain. Le premier correspond à la décroissance de la probabilité due au fait qu'une particule, à l'origine avec une vitesse entre v et $v + dv$, a une probabilité $P(v_1, \Delta s|v)dv_1$ de changer sa vitesse à une valeur quelconque entre v_1 et $v_1 + dv_1$. Le deuxième correspond à l'accroissement de la probabilité due au fait qu'une particule, à l'origine avec une vitesse quelconque entre v_1 et $v_1 + dv_1$, a une probabilité $P(v, \Delta s|v_1)dv$ de changer sa vitesse à une valeur entre v et $v + dv$. Cela donne

$$P(v, s + \Delta s|v_0)dv - P(v, s|v_0)dv = - \int_{v_1} P(v, s|v_0)dv \cdot P(v_1, \Delta s|v)dv_1 + \int_{v_1} P(v_1, s|v_0)dv_1 \cdot P(v, \Delta s|v_1)dv \quad (2.14)$$

où les intégrales portent sur toutes les vitesses possibles v_1 . Dans la première intégrale $P(v, s|v_0)$ ne dépend pas de v_1 , d'où en utilisant la condition de normalisation

$$\int_{v_1} P(v_1, \tau|v)dv_1 = 1$$

on a

$$\frac{\partial P}{\partial s} \Delta s = -P(v, s|v_0)dv + \int_{-\infty}^{+\infty} P(v - \xi, s|v_0)P(v, \Delta s|v - \xi)d\xi \quad (2.15)$$

où on a introduit $v_1 \equiv v - \xi$.

Dans le cas du mouvement brownien, la vitesse d'une particule *macroscopique* peut changer que par une petite quantité pendant un temps Δs . Donc on

peut affirmer que la probabilité $P(v, \Delta s | v - \xi)$ peut être appréciable que quand $|\xi| = |v - v_1|$ est suffisamment petit. Nous pouvons faire un développement de l'expression à intégrer en série de Taylor en ξ autour de $P(v, s | v_0)P(v + \xi, \Delta s | v)$ et retenir seulement les termes d'ordre plus bas. On a donc

$$P(v - \xi, s | v_0)P(v, \Delta s | v - \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} [P(v, s | v_0)P(v + \xi, \Delta s | v)].$$

La relation (2.15) devient alors

$$\frac{\partial P}{\partial s} \Delta s = -P(v, s | v_0)dv + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} \left[P(v, s | v_0) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \xi^n P(v + \xi, \Delta s | v) \right]. \quad (2.16)$$

Le terme $n = 0$ est simplement, pour la normalisation adoptée, $P(v, s | v_0)$. Pour les autres termes, on peut introduire la notation

$$M_n \equiv \frac{1}{\Delta s} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \xi^n P(v + \xi, \Delta s | v) = \frac{\langle [\Delta v(\Delta s)]^n \rangle}{\Delta s}$$

où $\langle [\Delta v(\Delta s)]^n \rangle = \langle [v(\Delta s) - v(0)]^n \rangle$ est le moment n -ième de l'accroissement de la vitesse dans le temps Δs . Donc l'équation (2.16) devient alors

$$\frac{\partial P(v, s | v_0)}{\partial s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} [M_n P(v, s | v_0)].$$

On peut démontrer que, quand Δs est *macroscopiquement* infinitésimal (mais toujours $\Delta s \gg \tau_{co}$) les termes avec $n > 2$ peuvent être négligés. Donc l'équation pour $P(v, s | v_0)$ se réduit à

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial v}(M_1 P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2}(M_2 P). \quad (2.17)$$

Dans le cas du problème du mouvement brownien on peut déduire les valeurs

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\Delta s} \langle \Delta v(\Delta s) \rangle = -\gamma v \\ M_2 &= \frac{1}{\Delta s} \langle [\Delta v(\Delta s)]^2 \rangle = \frac{2kT}{m} \gamma \end{aligned} \right\}$$

où $\gamma \equiv \frac{\alpha}{m}$. Donc l'équation (2.17) devient

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \gamma \frac{\partial}{\partial v}(vP) + \gamma \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}. \quad (2.18)$$

En résolvant l'équation (2.18), on peut obtenir la distribution $P(v, s | v_0)$ à tous les temps suivants. Une fois obtenue $P(v, s | v_0)$, toutes valeurs moyennées de v

2.2 L' équation de Boltzmann

peuvent être calculées après intégration. Si $h(v)$ est une fonction quelconque de v on aura

$$\langle h(v(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) P(v, t | v_0) dv.$$

L'équation (2.18) est une forme particulière de l'équation de Fokker-Planck [Fok14, Pla17]. En effet, l'équation générale pour une variable x a la forme [Ris84]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] P. \quad (2.19)$$

Dans cette équation $D^{(2)}(x) > 0$ est appelé "coefficient de diffusion" et $D^{(1)}(x)$ "coefficient de dérive". Ils peuvent dépendre aussi du temps. Le coefficient de diffusion donne une mesure de l'étalement de la distribution P , tandis que le coefficient de dérive contrôle le déplacement du centroïde de la distribution. L'équation (2.18) est donc associée à un coefficient de dérive linéaire et un coefficient de diffusion constant.

L'équation de Fokker-Planck n'est pas, bien entendu, la seule équation possible pour décrire l'évolution d'une fonction de distribution. Par exemple on peut citer l'équation de Boltzmann (dont on va parler dans le paragraphe suivant) ou les équations maîtresses. L'équation de Fokker-Planck est d'habitude utilisée pour des variables qui décrivent un sous-système macroscopique mais petit, comme la position et la vitesse pour le mouvement brownien d'une petite particule ou un courant dans un circuit électrique. Si le sous-système est grand les fluctuations peuvent alors être négligées et on a donc une équation déterministe. Toutefois, dans les cas où les équations déterministes *ne sont pas stables* ou sont *chaotiques*, une description stochastique est alors nécessaire aussi pour des grands systèmes.

2.2 L' équation de Boltzmann

La première équation du mouvement à avoir été dérivée pour la distribution dans l'espace des phases d'un gaz dilué est l'équation de Boltzmann [Bol72]. Dans ce cas, le système est décrit statistiquement par la *fonction de distribution* $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ qui représente le nombre de molécules du gaz dans l'élément de volume $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ de l'espace des positions et impulsions. Si on néglige complètement les collisions entre les molécules, le théorème de Liouville sera valide, impliquant qu'un élément de volume de l'espace des phases à une particule entraîné par le fluide reste constant. Pour la distribution f on pourra écrire que la distribution des particules emportées par le fluide reste constante

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (2.20)$$

Si le système se trouve dans un champ externe $U(\mathbf{r})$, alors on a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$$

où $\mathbf{F} = -\nabla U$ est la force avec laquelle le champ agit sur les molécules.

L'équation (2.20) n'est plus valide si on tient compte des collisions (i.e. des interactions à deux ou plusieurs corps): la fonction de distribution n'est plus constante le long des trajectoires des particules du fluide. A sa place, il faut écrire

$$\frac{df}{dt} = I[f] \quad (2.21)$$

où la quantité $I[f]$, qui est appelée *intégrale des collisions*, indique la vitesse de variation de la fonction de distribution due aux collisions: $d\mathbf{r}d\mathbf{p}I[f]$ est la variation par unité de temps, causée par les collisions, du nombre de molécules dans le volume $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ de l'espace des phases.

Explicitons maintenant la quantité $I[f]$ pour une interaction à deux corps. Quand deux particules entrent en collision, les valeurs de leurs impulsions \mathbf{p} changent. Donc chaque choc, auquel une particule d'impulsion comprise entre \mathbf{p} et $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ est soumise, la fait sortir de l'intervalle $d\mathbf{p}$. Le nombre totale de collisions avec une autre particule est donné par

$$d\mathbf{r}d\mathbf{p} \int w(\mathbf{p}', \mathbf{p}_1'; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) f f_1 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}_1'$$

où l'on intègre sur les impulsions des particules après réaction et sur l'impulsion du partenaire de la collision, où $w(\mathbf{p}', \mathbf{p}_1'; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ est le taux de transitions $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}', \mathbf{p}_1'$ et $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ et $f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)$. Aucune intégration n'est effectuée en \mathbf{r} car l'interaction est supposée locale. C'est le terme de perte. Toutefois il y a aussi des molécules, dont l'impulsion n'appartenait pas à l'intervalle $d\mathbf{p}$ autour de \mathbf{p} , qui vont finir dans cet intervalle après avoir subi une collision. Ces sont les transitions $\mathbf{p}', \mathbf{p}_1' \rightarrow \mathbf{p}, \mathbf{p}_1$, de nouveau avec toutes les valeurs possibles de $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1'$ pour un \mathbf{p} donné. Le nombre de ces collisions est

$$d\mathbf{r}d\mathbf{p} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}_1') f' f_1' d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}_1'.$$

C'est le terme de gain. Après soustraction de ces deux contributions on obtient

$$d\mathbf{r}d\mathbf{p} \int (w' f' f_1' - w f f_1) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}_1'.$$

où on a indiqué

$$w' = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \mathbf{p}', \mathbf{p}_1'), \quad w = w(\mathbf{p}', \mathbf{p}_1'; \mathbf{p}, \mathbf{p}_1).$$

2.3 La hiérarchie BBGKY

Comme on a $w = w'$ et

$$w d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'_1 = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$$

(où $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ est la section efficace de collision des deux molécules du gaz et Ω est l'angle entre $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1$), on obtient finalement l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = I[f] \quad (2.22)$$

$$I[f] = \int d\mathbf{p}_1 d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f' f'_1 - f f_1). \quad (2.23)$$

2.3 La hiérarchie BBGKY

Bien que la dérivation de l'équation (2.22) soit satisfaisante du point de vue physique, il est très intéressant d'expliquer ici une méthode qui permet d'obtenir analytiquement cette équation à partir des équations microscopiques du mouvement des particules du gaz. Cette méthode est importante car elle permet d'obtenir non seulement l'équation de Boltzmann, mais aussi ses corrections.

Le point de départ de la méthode est le théorème de Liouville pour la fonction de distribution d'un gaz, considéré comme un système de N particules. Notons cette fonction (dans l'espace à $6N$ dimensions) avec le symbole $f_N(s_1, s_2, \dots, s_N)$, où les s_i indiquent l'ensemble des coordonnées et des impulsions de la i -ème particule: $s_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$. Cette fonction est normalisée à 1

$$\int f_N(s_1, s_2, \dots, s_N) ds_1 \dots ds_N = 1.$$

La fonction de distribution à une particule, qui figure dans l'équation de Boltzmann, s'obtient en intégrant la fonction f_N par rapport à tous les ds_i excepté ds_1

$$f_1 = \int f_N(s_1, s_2, \dots, s_N) ds_2 \dots ds_N;$$

la fonction f_1 est normalisée, elle aussi, à 1. Nous conserverons la notation f (sans indice) pour la fonction de distribution normalisée au nombre total de particule: $f = N f_1$.

A partir du théorème de Liouville dans l'espace à $6N$ dimensions on aura

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \dot{\mathbf{p}}_i \right] = 0. \quad (2.24)$$

En utilisant les équations d'Hamilton

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}$$

et en supposant pour le hamiltonien d'un gaz monoatomique la forme

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

l'équation (2.24) devient

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} \mathbf{v}_i - \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \sum_{i < j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \right\} = 0. \quad (2.25)$$

où U_{ij} indique $U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$. Intégrons maintenant cette équation par rapport à ds_2, \dots, ds_N . A cause de cette intégration, parmi tous les termes de la somme dans l'équation (2.25), il ne restera seulement que ceux qui contiennent les dérivées par rapport à \mathbf{p}_1 ou \mathbf{r}_1 ; les autres intégrales sont nulles parce qu'elles vont faire intervenir la fonction f_N calculée à l'infini; mais la distribution f_N étant normalisée, elle doit tendre vers zéro lorsque l'une quelconque de ses variables tend vers l'infini. On obtient ainsi

$$\frac{\partial f_1(s_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial f_1(s_1, t)}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 = N \int \frac{\partial f_2(s_1, s_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} ds_2 \quad (2.26)$$

où f_2 est la fonction de distribution de deux particules, c'est-à-dire

$$f_2 = \int f_N ds_3 \dots ds_N.$$

De façon analogue, en intégrant la relation (2.25) par rapport à ds_3, \dots, ds_N on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{v}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} = \\ N \int \left[\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial U_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial U_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} \right] ds_3 \end{aligned}$$

où $f_3(s_1, s_2, s_3, t)$ est la fonction de distribution de trois particules. On va obtenir ainsi une chaîne d'équations dans laquelle il faut connaître f_{n+1} pour pouvoir étudier l'évolution de f_n . Ce système d'équations, pour n variant de 1 à N , constitue ce que l'on appelle la "hiérarchie BBGKY", car y sont attachés les noms de Bogoliubov, Born et Green, Kirkwood, et Yvon [Bog46, Bor46, Kir56].

Ce système d'équations est jusqu'ici *exact* et parfaitement équivalent à l'équation de Liouville. Son principal intérêt est cependant qu'il se prête mieux que l'équation de Liouville complète aux approximations, qu'il permet d'introduire de façon systématique.

En effet, pour pouvoir véritablement exploiter la hiérarchie BBGKY, il est nécessaire de la tronquer à un certain niveau, c'est-à-dire de la réduire à un système

2.3 La hiérarchie BBGKY

fermé de n équations faisant intervenir seulement les n premières fonctions de distribution. Le système d'équations tronqué permet ensuite de calculer f_n , puis f_{n-1}, \dots ; une illustration très simple de cette méthode est donnée par l'équation de Vlasov; l'équation de Boltzmann peut aussi être obtenue de cette façon.

2.3.1 L'équation de Vlasov

Dans l'équation (2.26) qui régit l'évolution de la fonction de distribution à une particule, supposons que la fonction f_2 puisse être remplacée au second membre par l'expression approchée

$$f_2(s_1, s_2, t) \simeq f_1(s_1, t)f_1(s_2, t).$$

Cette hypothèse considère les particules comme *indépendantes* les unes des autres: la probabilité de trouver, à un instant t quelconque, deux particules l'une en \mathbf{r}_1 et l'autre en \mathbf{r}_2 avec les impulsions respectives \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 , est alors le produit de la probabilité de trouver à cet instant une particule en \mathbf{r}_1 avec l'impulsion \mathbf{p}_1 et de la probabilité de trouver au même instant une particule en \mathbf{r}_2 avec \mathbf{p}_2 ; on néglige donc les corrélations entre ces deux événements simultanés. Cette hypothèse peut donc être vue comme un hypothèse d'information minimum (c'est-à-dire d'entropie maximum).

L'équation (2.26) ne fait plus alors intervenir que la fonction de distribution à une particule $f_1(s_1, t)$; elle s'écrit

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \bar{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0$$

avec

$$\bar{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \int d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_1(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t).$$

C'est l'équation proposée par Vlasov en 1938 [Vla38]. L'hypothèse d'indépendance des particules a pour effet de décrire leurs interactions par un *potentiel moyen* $\bar{u}(\mathbf{r}, t)$: lorsqu'une particule se trouve au point \mathbf{r} , elle y ressent globalement l'effet des $(N - 1)$ autres particules à travers ce potentiel $\bar{u}(\mathbf{r}, t)$. Ce type d'approximation, dit de "champ moyen", est très souvent utilisé en mécanique statistique. Notons un point important: le potentiel moyen dépend lui-même de la fonction de distribution f_1 que l'on cherche à déterminer. On est donc confronté à un problème d'auto-cohérence donc à un problème non linéaire. La dynamique pourra alors présenter toutes les caractéristiques des équations non linéaires: solitons, bifurcations, chaos ...

Soulignons que, contrairement à l'équation de Boltzmann, l'équation de Vlasov est invariante par renversement du temps: si l'on change t en $-t$ dans l'équation de Vlasov, il faut changer simultanément \mathbf{p} en $-\mathbf{p}$ (le renversement du temps

transforme une vitesse en son opposée) et l'on constate que $f_1(\mathbf{r}, -\mathbf{p}, -t)$ vérifie la même équation que $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

2.4 Le cas (nucléaire) des fermions

Tout ce que l'on vient de montrer est valide dans une approche classique. Dans le cas nucléaire on est confronté à des systèmes quantiques de fermions.

Considérons un système de N particules caractérisées par le hamiltonien

$$H = T + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j=1}^N V_{ij}$$

où le premier et le deuxième terme représentent respectivement l'énergie cinétique et les interactions à deux corps entre les particules. Un de ces systèmes dans un état pur peut être décrit à travers sa fonction d'onde (à N corps) ϕ qui est solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = H |\phi\rangle$$

où H est le hamiltonien du système. Si on a à faire à un ensemble statistique, on introduira plutôt la matrice densité

$$\rho_N = \sum_{m=1}^N |\phi^{(m)}\rangle \langle \phi^{(m)}|$$

L'évolution quantique de ce système est donnée par l'équation de Von Neumann (qui est l'équivalent quantique de l'équation de Liouville)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_N(t) = [H, \rho_N(t)] \equiv \mathcal{L} \rho_N(t)$$

que l'on déduit facilement de l'équation de Schrödinger et où \mathcal{L} est l'opérateur liouvillien $\mathcal{L} \equiv [H, \]$.

Dans le formalisme de la seconde quantification on peut définir les densités à m corps comme valeur moyenne des opérateurs de création et d'annihilation de particules a_i et a_i^\dagger

$$\rho_m(1 \dots m, 1' \dots m', t) \equiv \langle a_1^\dagger \dots a_m^\dagger a_{m'} \dots a_{1'} \rangle$$

où $\langle A \rangle = \langle \phi | A | \phi \rangle$ dans le cas d'un état pur et $\langle A \rangle = \text{Tr} \rho_N A$ dans le cas d'un ensemble statistique. On peut donc écrire les opérateurs densités à un corps et à deux corps

$$\rho_1(1, 1', t) = \langle a^\dagger(1, t) a(1', t) \rangle$$

2.4 Le cas (nucléaire) des fermions

$$\rho_2(1\ 2, 1'\ 2', t) = \langle a^\dagger(1, t) a^\dagger(2, t) a(1', t) a(2', t) \rangle.$$

Si maintenant, grâce à l'équation de Von Neumann, on écrit l'évolution de ces deux densités, on obtient les deux premières équations de la hiérarchie Martin-Schwinger (qui est l'équivalent quantique de la hiérarchie BBGKY)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_1(1, 1', t) = \sum_2 \langle 12 | [H, \rho_2(t)] | 1'2 \rangle, \quad (2.27)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_2(12, 1'2', t) = \langle 12 | [H, \rho_2(t)] | 1'2' \rangle + \sum_3 \langle 123 | [\tilde{V}, \rho_3] | 1'2'3 \rangle \quad (2.28)$$

où $\langle 123 | \tilde{V} | 1'2'3' \rangle = \langle 13 | V | 1'3' \rangle \delta_{22'} + \langle 23 | V | 2'3' \rangle \delta_{11'}$. A partir de cette hiérarchie (en particulier de l'équation 2.27) on peut déduire facilement les équations de Hartree et de Hartree-Fock dépendant du temps [Bon76, Neg82] en supposant que les corrélations à deux particules peuvent être négligées; à l'approximation d'Hartree $\rho_2(12, 1'2') = \rho_1(1, 1')\rho_1(2, 2')$, tandis qu'à l'approximation d'Hartree-Fock on tient compte des termes d'échange

$$\rho_2(12, 1'2') = \rho_1(1, 1')\rho_1(2, 2') - \rho_1(1, 2')\rho_1(2, 1'). \quad (2.29)$$

On obtient donc

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 = [h, \rho_1] \quad (2.30)$$

où $h = K + U_1$ est l'hamiltonien de Hartree ou de Hartree-Fock, U_1 étant le potentiel moyen calculé à partir de l'interaction à deux corps V_{12} et prenant éventuellement en compte le terme d'échange.

2.4.1 Les approximations semi-classiques

L'analogie formelle entre l'équation classique de Liouville et l'équation quantique de Von Neumann nous laisse penser que l'on peut introduire un modèle intermédiaire qui associe la facilité conceptuelle de la théorie classique et quelques caractéristiques quantiques comme, par exemple, le principe d'exclusion de Pauli [Pau25] pour l'occupation de l'espace des phases, qui empêche deux fermions d'occuper le même état quantique.

Ce modèle intermédiaire s'obtient au moyen de la transformée de Wigner. La transformation de Wigner permet d'écrire des opérateurs à un corps A , exprimés en une représentation $|r\rangle$ ou $|p\rangle$, dans une représentation mixte [Rin80]; elle revient à faire une transformation de Fourier:

$$A_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\mathbf{s} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}/\hbar} \langle \mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} | A | \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2} \rangle.$$

De cette façon on peut introduire la fonction de distribution à une particule qui s'écrit

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\mathbf{s} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}/\hbar} \rho_1(\mathbf{r} + \mathbf{s}/2, \mathbf{r} - \mathbf{s}/2)$$

où ρ_1 est la matrice densité à un corps. De façon analogue on peut obtenir les fonctions de distribution à m particules.

Puisque la transformée de Wigner fait intervenir \hbar dans l'exponentielle, on voit qu'elle permet de faire des développements et des *approximations semi-classiques*, en arrêtant les développements à un ordre donné en \hbar ou en faisant tendre \hbar vers 0. La transformée de Wigner de l'équation TDHF (2.30) contient le calcul des transformées de $[h, \rho_1]$. Pour cela on utilise la propriété [Rin80]

$$[A, B]_W = 2iA_W \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Lambda\right) B_W$$

où l'opérateur Λ est défini par $\vec{\nabla}_r \vec{\nabla}_p - \vec{\nabla}_p \vec{\nabla}_r$ (la flèche indiquant dans quelle direction agit l'opérateur de dérivation). Cette relation permet d'obtenir la transformée de l'équation TDHF (2.30)

$$\frac{d}{dt}f = \frac{2}{\hbar} h_W \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Lambda\right) f \quad (2.31)$$

où $h_W = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ est la transformée de Wigner de l'hamiltonien de Hartree-Fock. Le développement en puissance de \hbar dans l'équation (2.31) peut être tronqué pour donner l'approximation semi-classique à l'ordre le plus bas

$$\frac{d}{dt}f = \{h_W, f\} = -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r f - \nabla_p U \cdot \nabla_r f + \nabla_r U \cdot \nabla_p f$$

si U dépend éventuellement de \mathbf{p} . On voit bien qu'à la limite semi-classique on obtient l'équation de Vlasov.

2.4.2 Au delà du champ moyen

Aller au delà du champ moyen (et donc de l'équation de Vlasov) consiste à faire des approximations moins sévères que celles indiquées précédemment, mais en procédant de la même manière, c'est-à-dire en découplant les équations d'ordre le plus bas dans le nombre des particules. Dans le contexte de la physique nucléaire, une telle dérivation a été effectuée par Botermans et Malfliet [Bot86]. A la limite semi-classique ils obtiennent une équation cinétique du type Boltzmann avec champ moyen qui s'écrit

$$\frac{d}{dt}f = \{h_W, f\} + I_{coll} \quad (2.32)$$

2.5 L'équation de Boltzmann - Langevin

où

$$I_{coll} = \int d\mathbf{p}_1 d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f' f'_1 \bar{f} \bar{f}_1 - f f_1 \bar{f}' \bar{f}'_1) \quad (2.33)$$

(les indices des fonctions de distribution à un corps font référence ici aux particules, par exemple $f_1 \equiv f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$) La notation \bar{f} indique la quantité $1 - f$ et est reliée au principe de blocage de Pauli: en effet, en sachant que 1 est la valeur maximale possible de la fonction de distribution dans un point (\mathbf{r}, \mathbf{p}) de l'espace des phases et que f est sa valeur réelle, la probabilité d'occuper ce point de la part d'une particule provenant de l'extérieur est proportionnelle à $1 - f$. L'équation 2.32 est connue comme équation BUU (Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck) [Ber88, Nor28, Ueh33].¹

2.5 L'équation de Boltzmann - Langevin

L'équation BUU inclut l'effet moyen des collisions à deux corps sur l'évolution temporelle de la distribution réduite à un corps et donc rentre dans la catégorie des traitements à un corps. Puisque ces approches traitent seulement l'effet moyen des collisions à deux corps, l'évolution du système est complètement déterministe: une distribution initiale à un corps bien spécifiée produit une et une seule trajectoire dans l'espace de toutes les distributions à un corps possibles. Ces caractéristiques limitent l'utilité pratique de ces modèles à des processus dans lesquels la dynamique montre des fluctuations relativement petites. Toutefois pendant des collisions nucléaires aux énergies intermédiaires, les fluctuations peuvent être très importantes et donc il faut développer de nouvelles approches capables de tenir compte des effets des fluctuations.

Sur la base de ce que l'on vient de voir tout le long de ce chapitre nous pouvons imaginer de considérer l'évolution de la densité à un corps comme un processus de Langevin généralisé, proche du mouvement d'une particule brownienne dans un bain thermique, excepté le fait que la coordonnée brownienne n'est pas l'impulsion de la particule mais la densité à une particule elle-même.

Pour pouvoir introduire ces effets dans des équations de transport il faut considérer les corrélations à deux corps. En particulier on ne peut plus faire, pour la densité à deux corps ρ_2 , l'hypothèse du chaos moléculaire exprimée par la relation (2.29) mais il faut remplacer cette relation par la décomposition

$$\rho_2(12, 1'2', t) = \rho_2^0(12, 1'2', t) + \delta\sigma(12, 1'2', t) \quad (2.34)$$

où $\rho_2^0(12, 1'2', t)$ est encore la partie non corrélée définie par la relation (2.29) et $\delta\sigma(12, 1'2', t)$ est la partie qui contient toutes les corrélations.

¹Selon la méthode numérique de résolution utilisée, elle est connue aussi sous d'autres acronymes: VUU (Vlasov-Uehling-Uhlenbeck) [Kru85], LV (Landau-Vlasov) [Rem84], BNV (Boltzmann-Nordheim-Vlasov) [Bon94].

Nous pouvons introduire cette décomposition dans l'équation d'évolution de la densité à deux corps (2.28). Si on fait l'hypothèse que l'effet des corrélations à trois corps est négligeable, nous pouvons éliminer dans cette équation le dernier terme du deuxième membre et obtenir une équation pour l'évolution des corrélations $\delta\sigma(t)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\sigma(t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_2^0(t) + \mathcal{L}\rho_2(t). \quad (2.35)$$

En utilisant la décomposition du hamiltonien H en une partie qui contient le champ moyen et une autre qui contient l'interaction résiduelle $H = H_0 + H_v$ et en considérant seulement le terme d'ordre plus bas dans l'interaction (en particulier en négligeant le terme $\mathcal{L}_v \delta\sigma$: c'est l'hypothèse du couplage faible) on obtient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\sigma(t) = \mathcal{L}_0 \delta\sigma(t) + \mathcal{L}_v \rho_2^0(t).$$

La résolution de cette équation donne

$$\rho_2(t) = \rho_2^0(t) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' G(t-t') \mathcal{L}_v \rho_2^0(t') + G(t-t_0) \delta\sigma(t_0) \quad (2.36)$$

où $G(t-t_0) = \exp -\frac{i}{\hbar} [(t-t_0)\mathcal{L}_0]$ est le propagateur champ moyen. On voit bien que la densité à deux corps peut être séparée en trois parties physiquement distinctes: le premier terme est la composante non corrélée qui permet de définir un champ moyen; le deuxième terme décrit le changement dans la densité à deux corps pendant une collision et produit l'intégrale des collisions dans l'équation de transport; le troisième terme décrit la propagation des corrélations initiales dans l'équation de transport et donne un terme additionnel que nous appellerons terme de collision fluctuant.

Nous pouvons donc obtenir une équation d'évolution pour la densité à un corps en introduisant l'expression (2.36) dans l'équation (2.27)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1(t) + \frac{i}{\hbar} [h, \rho_1] = K(\rho_1) + \delta K(\rho_1) \quad (2.37)$$

où $K(\rho_1)$ est l'intégrale des collisions

$$K(\rho_1) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_2 \int_{t_0}^t dt' < 12 | \mathcal{L}_v G(t-t') \mathcal{L}_v \rho_2^0 | 1'2 >, \quad (2.38)$$

et $\delta K(\rho_1)$ le terme de collision fluctuant

$$\delta K(\rho_1) = -\frac{i}{\hbar} \sum_2 < 12 | \mathcal{L}_v G(t-t_0) \delta\sigma(t_0) | 1'2 >. \quad (2.39)$$

A la limite semi-classique l'équation (2.37) donne celle que l'on appelle "équation de Boltzmann-Langevin" [Bix69]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r - \nabla_r U(f) \cdot \nabla_p \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = I(f) + \delta I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (2.40)$$

2.5 L'équation de Boltzmann - Langevin

Nous pouvons observer que, si la densité à deux corps est initialement non corrélée, c'est-à-dire, si $\rho_2(t_0) = \rho_2^0(t_0)$, alors la quantité $\delta K(t)$ dans l'expression (2.39) devient nulle et on retombe sur les équations de transport habituelles.

L'équation de transport (2.37) (ou l'équation (2.40) à la limite semi-classique) contient toutes les informations sur les propriétés de la dissipation et de la fluctuation de la densité à un corps. Toutefois à l'état actuel elle n'est pas encore utile, parce qu'il est presque impossible de calculer le terme de collision fluctuant. Il faut introduire d'autres approximations. En stricte analogie avec l'équation de Langevin, nous faisons l'hypothèse que le terme de collision fluctuant agit sur la densité comme une force aléatoire caractérisée par une fonction de corrélation

$$\prec \delta K(1, 1', t) \delta K(2, 2', t) \succ = C(1, 1'; 2, 2'; t, t') = \tilde{C}(1, 1'; 2, 2') \delta(t - t')$$

avec un temps de corrélation de l'ordre de la durée d'une collision à deux corps, qui, dans l'hypothèse markovienne ici faite, est égale à zéro. Le symbole $\prec \cdot \succ$ correspond à une moyenne statistique.

A partir de l'équation (2.38) il est possible de donner pour l'intégral des collisions l'expression

$$K(\rho_1) = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \int d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 w(12; 34) (\bar{n}_1 \bar{n}_2 n_3 n_4 - n_1 n_2 \bar{n}_3 \bar{n}_4) \quad (2.41)$$

où g est la dégénérescence, les quantités n_i sont les nombres d'occupation et $w(12; 34)$ est la probabilité de transition entre les états (1,2) et (3,4) qui sera explicitée dans la suite. Cette expression est tout à fait équivalente à celle obtenue à la limite semi-classique dans le paragraphe 2.4.2 en substituant les nombres d'occupation avec les fonctions de distribution à un corps.

2.5.1 La fonction de corrélation (terme de Langevin)

Donc afin de spécifier complètement l'équation de transport stochastique il nous faut expliciter la fonction de corrélation. Dans le cas d'un système homogène il nous suffit de considérer les termes diagonaux du terme de collision fluctuant $\delta K(\mathbf{p}, \mathbf{p}, t) \equiv \delta K(\mathbf{p}, t)$ et de suivre sa propagation sur des temps courts par rapport au temps moyen entre les collisions; donc

$$\tilde{C}(1, 1'; 2, 2') = 2D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \prec \delta K(\mathbf{p}, t + \tau) \delta K(\mathbf{p}', t) \succ. \quad (2.42)$$

On peut évaluer δK à l'aide de l'équation (2.39) en explicitant le commutateur contenu dans \mathcal{L} .

$$\begin{aligned} \delta K(\mathbf{p}, t + \tau) = \\ -\frac{i}{2\hbar} \sum_{234} (\langle 12 | v(\tau) | 34 \rangle \delta\sigma(34, 12, t) - \langle 34 | v(\tau) | 12 \rangle \delta\sigma(12, 34, t)) \end{aligned} \quad (2.43)$$

où

$$\begin{aligned} \langle 12|v(\tau)|34 \rangle &\equiv \langle 12|v|34 \rangle \exp \left[-i \frac{\tau}{\hbar} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \right] \\ \delta\sigma(34, 12, t) &\equiv \langle 34|\delta\sigma(t)|12 \rangle . \end{aligned}$$

En introduisant la relation (2.43) dans l'équation (2.42) on obtient

$$\begin{aligned} 2D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{\substack{234 \\ 2'3'4'}} [\langle 12|v(\tau)|34 \rangle \langle 3'4'|v|1'2' \rangle \prec \delta\sigma(34, 12) \delta\sigma(1'2', 3'4') \succ \right. \\ & - \langle 12|v(\tau)|34 \rangle \langle 1'2'|v|3'4' \rangle \prec \delta\sigma(34, 12) \delta\sigma(3'4', 1'2') \succ \\ & + \langle 34|v(\tau)|12 \rangle \langle 1'2'|v|3'4' \rangle \prec \delta\sigma(12, 34) \delta\sigma(3'4', 1'2') \succ \\ & \left. - \langle 34|v(\tau)|12 \rangle \langle 3'4'|v|1'2' \rangle \prec \delta\sigma(12, 34) \delta\sigma(1'2', 3'4') \succ \right] \frac{d\tau}{4\hbar^2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pour calculer les quantités $\prec \delta\sigma \delta\sigma' \succ$ on fait deux approximations: on néglige les fluctuations quantiques par rapport aux fluctuations statistiques

$$\prec \delta\sigma \delta\sigma' \succ = \prec \langle \phi | \delta A | \phi \rangle \langle \phi | \delta A' | \phi \rangle \succ =$$

$$\frac{1}{2} (\prec \langle \phi | \delta A \delta A' | \phi \rangle \succ + \prec \langle \phi | \delta A' \delta A | \phi \rangle \succ)$$

et on calcule ce terme à l'ordre plus bas dans les corrélations, en estimant les valeurs moyennes quantiques sur un état non corrélée. De cette façon, en utilisant le théorème de Wick [Rin80], on obtient

$$\prec \delta\sigma(kl, ij) \delta\sigma(i'j', k'l') \succ = (\delta_{ii'} \delta_{jj'} - \delta_{ij'} \delta_{ji'}) (\delta_{kk'} \delta_{ll'} - \delta_{kl'} \delta_{lk'}) (1 - n_i)(1 - n_j) n_k n_l$$

où les $\delta_{ii'}$ sont des deltas de Kroenecker et les n_i les nombres d'occupation. En introduisant ces quantités dans l'équation (2.44) on obtient alors

$$\begin{aligned} 2D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\hbar^2} \cos \left[\frac{\tau}{\hbar} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \right] \\ & \times \left\{ \sum_{234} |\langle 12|v|34 \rangle|^2 (n_1 n_2 \bar{n}_3 \bar{n}_4 + \bar{n}_1 \bar{n}_2 n_3 n_4) \delta_{11'} \right. \\ & + \sum_{34} |\langle 11'|v|34 \rangle|^2 (n_1 n_{1'} \bar{n}_3 \bar{n}_4 + \bar{n}_1 \bar{n}_{1'} n_3 n_4) \\ & \left. - 2 \sum_{24} |\langle 12|v|1'4 \rangle|^2 (n_1 n_2 \bar{n}_{1'} \bar{n}_4 + \bar{n}_1 \bar{n}_1' n_1' n_4) \right\} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

On peut alors utiliser

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\hbar^2} \cos \left[\frac{\tau}{\hbar} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \right] = \frac{\pi}{\hbar} \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$

2.5 L'équation de Boltzmann - Langevin

qui est le reflet de l'approximation markovienne. En remplaçant les sommes avec des intégrales sur les impulsions $\sum_i \rightarrow gV \int d\mathbf{p}/(2\pi\hbar^2)$, où V est le volume du système et g est la dégénérescence, on obtient

$$\begin{aligned} D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = & \int d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 w(11'; 34) (n_1 n_1' \bar{n}_3 \bar{n}_4 + \bar{n}_1 \bar{n}_1' n_3 n_4) \\ & - 2 \int d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_4 w(12; 1'4) (n_1 n_2 \bar{n}_1' \bar{n}_4 + \bar{n}_1 \bar{n}_1' n_1' n_4) \\ & + \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \int d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 w(12; 34) (n_1 n_2 \bar{n}_3 \bar{n}_4 + \bar{n}_1 \bar{n}_2 n_3 n_4) \end{aligned} \quad (2.46)$$

où

$$w(12; 34) = \frac{V^3 g^2}{(2\pi\hbar)^6} | < 12 | v | 34 > |^2 \frac{\pi}{\hbar} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4). \quad (2.47)$$

Si maintenant on utilise l'approximation semi-classique, en supposant que les collisions sont locales, on peut simplement utiliser le résultat obtenu et dire que dans les équations de transport la fonction de corrélation est locale dans les coordonnées spatiales

$$C(1, 1'; 2, 2'; t, t') = 2D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t').$$

Donc la fonction de corrélation pour l'équation de Boltzmann-Langevin (2.40) est la même que celle que l'on vient d'obtenir (2.46), dans laquelle on a remplacé les nombres d'occupation n_i par les fonctions de distribution dans l'espace des phases $f(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, t)$.

Il faut remarquer que, comme conséquence du théorème de fluctuation - dissipation, la fonction de corrélation est entièrement déterminée à partir des propriétés moyennes de la fonction de distribution à un corps. Cette théorie ne requiert donc pas de nouveaux paramètres pour décrire les fluctuations.

Si on compare le résultat obtenu avec l'intégrale de collision on s'aperçoit que l'expression (2.41) ressemble au dernier terme de la fonction de corrélation (2.46) excepté le fait que la fonction de corrélation fait intervenir la somme des termes de perte et de gain, tandis que dans l'intégrale des collisions c'est la différence qui apparait. Ceci a une signification physique simple: le changement dans les fonctions de distribution est déterminé par l'effet net des termes de perte et de gain. D'autre part le changement dans les fluctuations des fonctions de distribution est déterminé par la somme des termes de perte et de gain, comme dans tout problème de mouvement brownien.

2.5.2 Nombre de collisions fluctuant

Le traitement du problème dans les termes que l'on vient de présenter est dû au travail de Ayik et Grégoire [Ayi88, Ayi90]. Dans les mêmes années un travail

de Randrup et Rémaud [Ran90] suggérait une méthode différente pour traiter la même problématique, mais qui, comme nous le verrons dans la suite, revient à la même équation, sans pour cela invoquer les mêmes hypothèses.

Considérons un ensemble de M systèmes identiques à plusieurs corps que nous allons indiquer avec $m = 1, \dots, M$. Chaque élément de l'ensemble sera caractérisé par la densité à un corps $f_1^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, que nous supposons être normalisée de façon à donner l'occupation d'un élément de l'espace des phases de volume h^3 . Supposons aussi que les densités à un corps de ces systèmes au temps initial soient les mêmes (les systèmes seront, bien sûr, différents au niveau des densités à plusieurs corps). A cause de la nature stochastique des collisions, chaque système aura une évolution différente et il sera possible écrire la densité (qui, à partir de ce moment, sera toujours à un corps et qui sera simplement indiquée avec f) du système m -ième dans la forme

$$f^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \delta f^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

où $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ est la moyenne des densités pour tous les systèmes de l'ensemble

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \equiv \langle f^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (2.48)$$

où la notation $\langle \cdot \rangle$ indique encore la moyenne d'ensemble.

Par définition on a $\langle \delta f^{(m)} \rangle = 0$. Par contre δf peut être caractérisée par sa corrélation

$$\begin{aligned} \sigma(s, s') &= \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}') = \langle \delta f^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \delta f^{(m)}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \rangle = \\ &= \langle f^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f^{(m)}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \rangle - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Etant donnée une observable à un corps $A(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ son observation sur la m -ième réalisation de l'ensemble statistique est donnée par

$$A[f^{(m)}] = \int ds A(s) f^{(m)}(s)$$

où les notations $ds = d\mathbf{r}d\mathbf{p}/h^3$ et $s \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{p})$ ont été introduites. Cette dernière relation étant linéaire, il est immédiat de montrer que

$$\langle A[f^{(m)}] \rangle = A[f].$$

De façon analogue, si A et B sont deux observables à un corps, il est possible de calculer la fluctuation

$$\sigma_{AB}^2 \equiv \langle A[f^{(m)}] B[f^{(m)}] \rangle - \langle A[f^{(m)}] \rangle \langle B[f^{(m)}] \rangle =$$

2.5 L'équation de Boltzmann - Langevin

$$= \int ds ds' A(s) B(s) \sigma_f^2(s, s')$$

En absence de collision à deux corps l'évolution du système est régi par le champ moyen et donc par l'équation de Vlasov dans une approche semi-classique

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}};$$

l'évolution correspondante de la fonction de corrélation (2.49) est

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_f^2 &= \frac{\partial}{\partial t} \sigma_f^2 = - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \dot{\mathbf{p}'} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \dot{\mathbf{r}'} \right) \sigma^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}') = \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \right) \sigma^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Cette équation donne la variation de la fonction de corrélation due à la dynamique de Vlasov. Dans la suite nous considérerons la variation due à l'intégrale de collision.

Si on introduit dans l'espace des phases des cellules élémentaires de volume $\Delta s = \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{p} / \hbar^3$, il est possible de passer de la représentation continue à une représentation discrète et d'exprimer l'observable A , introduite précédemment, de la façon suivante

$$A[f^{(m)}] = \int ds A(s) f^{(m)} = \sum_i A_i f_i^{(m)} \Delta s$$

où l'indice i indique le point de l'espace des phases.

Le nombre moyen par unité de temps de collisions dans lesquelles des nucléons, se trouvant dans les positions s_1, s_2 de l'espace des phases, font une transition vers les positions s_3, s_4 est donné par

$$d\bar{\nu}_{1,2;3,4} = ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 f_1 f_2 \bar{f}_3 \bar{f}_4 w(12; 34) \delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_1) \quad (2.50)$$

où le taux de transition $w(12; 34)$ a été introduit dans la relation (2.47) et les deltas viennent du fait que les collisions sont locales. Le nombre de collisions durant un temps Δt et dans des volumes Δs autour des positions initiales et finales dans l'espace des phases est donné par

$$\bar{\nu}_{1,2;3,4} = \Delta t \int_{\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta s_4} d\bar{\nu}_{1,2;3,4}$$

Ce nombre est équivalent au nombre de collisions de l'équation BUU. Toutefois il faut considérer qu'en fait les collisions des nucléons sont un processus aléatoire.

Donc pour chaque réalisation du système le vrai nombre de collisions sera donné par

$$\Delta\nu^{(m)} = \bar{\nu} + \delta\nu^{(m)}$$

où $\delta\nu^{(m)}$ est un nombre aléatoire. Ce processus étant analogue à une marche aléatoire dans l'espace des collisions, on s'attend à ce que les nombres de collisions forment une distribution de Poisson caractérisée par

$$\langle \delta\nu_{ijkl}^{(m)} \delta\nu_{i'j'k'l'}^{(m)} \rangle = \bar{\nu}_{ijkl} \delta_{ijkl, i'j'k'l'}. \quad (2.51)$$

Dans cette approche, c'est le côté stochastique du nombre réel de collisions qui est à l'origine du comportement "brownien" de f . Il faut remarquer qu'ici le théorème de fluctuation - dissipation (2.51) est une simple conséquence des propriétés de la loi de Poisson.

Considérons d'abord la variation de f , causée par les collisions, dans une cellule de l'espace des phases. Une telle variation peut être due et aux collisions qui entraînent des particules au-dehors de la cellule et aux collisions qui au contraire amènent des particules dans la cellule (terme de gain). On peut donc introduire un terme de perte et un terme de gain qui valent en moyenne

$$\dot{f}^-(s) = -\frac{\Delta f(s)}{\Delta t} = -f(s)W^-(s) = -\int d\nu_{1,2,3,4}\delta(s_1 - s)$$

$$\dot{f}^+(s) = \frac{\Delta f(s)}{\Delta t} = f(s)W^+(s) = \int d\nu_{1,2,3,4}\delta(s_3 - s)$$

Les quantités $\dot{f}^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ et $\dot{f}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ s'identifient avec les termes de perte et de gain de l'équation BUU (cf. §§2.4.2 et 2.2) et on a

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \equiv V(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \dot{f}^+(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \dot{f}^-(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \bar{f}W^+ - fW^-.$$

On peut donc imaginer l'évolution de la fonction $f^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ comme un chemin aléatoire dans lequel les quantités $\dot{f}^-(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ et $\dot{f}^+(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ expriment la valeur moyenne des transitions à partir de et vers la cellule de volume h^3 autour de s . Le vrai nombre k de transitions pendant un intervalle de temps Δt suit la statistique de Poisson, pour laquelle la variance est égale à la valeur moyenne et la variance totale est donnée par la somme des variances. On a donc pour l'accroissement spontané des fluctuations

$$\frac{\Delta\sigma_f^2}{\Delta t} \equiv 2D = \bar{f}W^+ + fW^-.$$

Il est facile de voir que les variations temporelles de f et σ_f^2 sont exprimées par

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \bar{f}W^+ - fW^- \quad (2.52)$$

2.5 L'équation de Boltzmann - Langevin

$$\frac{\partial \sigma_f^2}{\partial t} = \bar{f}W^+ + fW^- - 2(W^+ + W^-)\sigma_f^2. \quad (2.53)$$

A l'équilibre est $\dot{f} = 0$ et $\dot{\sigma}_f^2 = 0$, d'où on obtient $\bar{f}W^+ = fW^-$ qui est le résultat que l'on attend sur la base du principe du bilan détaillé. La valeur de f à l'équilibre est donc $f_0 = W^+/(W^+ + W^-)$. Si on écrit l'équation de Vlasov dans la forme linéarisée $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{(f-f_0)}{\tau}$ on obtient $\tau^{-1} = W^+ + W^-$.

Pour ce qui concerne la variance, à partir de l'équation (2.53), on a, à l'équilibre

$$W^+ + (W^- - W^+)\frac{W^+}{W^+ + W^-} = 2(W^+ + W^-)\sigma_f^2$$

d'après laquelle $\sigma_f^2 = f_0\bar{f}_0$ qui est la variance à l'équilibre pour la fonction de Fermi-Dirac. Aussi, si on regarde l'évolution de la déviation de la variance de sa valeur à l'équilibre $\Delta = \sigma_f^2 - f\bar{f}$ on peut montrer qu'on a

$$\dot{\Delta} = -2(W^+ + W^-)\Delta$$

c'est-à-dire que la quantité Δ relaxe vers sa valeur à l'équilibre (qui est zéro) deux fois plus rapidement que f relaxe vers f_0 .

Considérons maintenant la corrélation entre les fluctuations de f en deux points différents de l'espace des phases. Le coefficient de diffusion qui correspond à ce processus peut être calculé en considérant l'évolution initiale du produit des changements induits dans les fonctions f dans les deux points considérés. Puisque chacun des deux points peut être aussi bien un état initial qu'un état final, il y a quatre processus de collision différents qui donnent une contribution et par conséquent le coefficient de diffusion en deux points différents de l'espace des phase peut être écrit

$$\begin{aligned} 2D_{cov}(s, s') &= f(s)f(s')W^{--}(s, s') + \bar{f}(s)\bar{f}(s')W^{++}(s, s') \\ &\quad - f(s)\bar{f}(s')W^{-+}(s, s') - \bar{f}(s)f(s')W^{+-}(s, s') \end{aligned} \quad (2.54)$$

où

$$\begin{aligned} f(s)f(s')W^{--}(s, s') &= \int d\nu_{1,2,3,4}\delta(s_1 - s)\delta(s_2 - s) \\ \bar{f}(s)\bar{f}(s')W^{++}(s, s') &= \int d\nu_{1,2,3,4}\delta(s_3 - s)\delta(s_4 - s) \\ \bar{f}(s)f(s')W^{-+}(s, s') &= f(s)\bar{f}(s')W^{-+}(s, s') \\ &= \int d\nu_{1,2,3,4}\delta(s_1 - s)\delta(s_3 - s) \end{aligned} \quad (2.55)$$

On s'aperçoit facilement qu'on a obtenu de nouveau la relation (2.46) à la limite semi-classique.

Finalement, pour donner un cadre complet de la théorie de Boltzmann-Langevin, les auteurs de la référence [Ben92] ont réussi à obtenir une expression analytique pour la partie non diagonale de la variance $\sigma_{cov}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}')$:

$$\sigma_{cov}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}') = f \bar{f} f' \bar{f}' \left\{ \alpha + \beta(\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2) + \gamma(\mathbf{p}^2 \mathbf{p}'^2) - \frac{1}{mT} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \right\}$$

où $\alpha = -\frac{c}{d}, \beta = \frac{b}{d}, \gamma = -\frac{a}{d}$ avec $b = 3mT$, $c = 10m^2TE_T$, $a = \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} f \bar{f}$ et $d = ac - b^2$. Ici T est la température, E_T est l'énergie cinétique par particule. Ce résultats a été testé dans un cas particulier à deux dimensions [Bur94a] par la comparaison avec des simulations numériques de l'équation de Boltzmann-Langevin. L'accord très bon entre les méthodes numérique et analytique, développées séparément, constitue un contrôle croisé important des deux résultats.

2.5.3 Equation de Fokker-Plank pour la distribution des densités à un corps

L'ensemble des trajectoires dans l'espace des phase est décrit par la fonction de distribution dans l'espace des densités à un corps:

$$\Phi(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \delta(f^{(m)} - f) = \frac{1}{M} \sum_m \delta(f_1^{(m)} - f_1) \delta(f_2^{(m)} - f_2) \dots$$

qui donne la probabilité qu'un système caractérisé par l'occupation spécifiée sur le réseau par le vecteur $f = (f_1, f_2, \dots)$ appartient à l'ensemble des $f^{(m)}$. La normalisation des probabilités s'écrit $\int df \Phi(f) = 1$. La moyenne d'ensemble d'une observable A peut être écrite

$$\langle A^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_n A^n = \int df \Phi(f) A[f] = \int df_1 df_2 \dots \Phi(f_1, f_2, \dots) A[f]$$

où l'intégrale est calculée dans l'espace abstrait des fonctions de distributions à un corps.

On peut maintenant écrire, dans le cadre des théories de transport, une équation maîtresse qui donne la variation temporelle de $\Phi(f_1, f_2, \dots)$ en termes des transitions d'un "point" $f = (f_1, f_2, f_3, \dots)$ vers un autre $f' = (f'_1, f'_2, f'_3, \dots)$. Une telle équation est représentée par la forme généralisée de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(f) = - \sum_k \frac{\partial}{\partial f_k} V_k[f] \Phi[f] + \sum_{kl} \frac{\partial^2}{\partial f_k \partial f_l} D_{kl}[f] \Phi[f] + \dots$$

où les $V_i[f]$ sont les coefficients de dérive et les $D_{ij}(f)$ les coefficients de diffusion. Dans cette approche, l'équation n'est pas limitée à des termes de fluctuation (ordre 2 en dérivée) mais peut contenir des termes d'ordre plus élevé.

2.5 L'équation de Boltzmann - Langevin

Pour l'observable A on aura donc

$$\dot{A} = \frac{\partial}{\partial t} \langle A^n \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \int df A(f) \Phi(f) = \int df A(f) \dot{\Phi}(f).$$

Et en particulier pour f

$$\begin{aligned} \dot{f}_i &= \int \frac{\partial \Phi}{\partial t} f'_i df' = \\ &= \int df' f'_i \left(- \sum_k \frac{\partial}{\partial f'_k} V_k \Phi \right) + \int df' f'_i \sum_{kl} \frac{\partial^2}{\partial f'_k \partial f'_l} D_{kl}(f') \Phi(f') = \\ &= \sum_k \int df' \frac{\partial}{\partial f'_k} f'_i V_k(f') \Phi(f') = \langle V_i(f) \rangle \approx V_i[f]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Cette équation décrit l'évolution de l'occupation moyennée sur l'ensemble de la cellule i dans l'espace des phases et donc la trajectoire moyenne du système. Considérons maintenant les fluctuations autour de cette valeur moyenne:

$$\sigma_{ij} = \langle \delta_i^n f \delta_j^n f \rangle = \langle f_i^n f_j^n \rangle - \langle f_i^n \rangle \langle f_j^n \rangle.$$

En procédant comme avant on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \int df' \dot{\Phi}(f') \delta f'_i \delta f'_j = \\ &= - \sum_k \int df' \frac{\partial}{\partial f'_k} V_k(f') \Phi(f') \delta f'_i \delta f'_j + \sum_{kl} \int df' \frac{\partial^2}{\partial f'_k \partial f'_l} D_{kl}(f') \Phi(f') \delta f'_i \delta f'_j = \\ &= \langle V_i(f) \delta f_j \rangle + \langle V_j(f) \delta f_i \rangle + \langle D_{ij}(f) \rangle + \langle D_{ji}(f) \rangle \approx \\ &\approx 2D_{ij}[f] + \sum_k (V'_{ij}[f] \sigma_{jk} + V'_{jk}[f] \sigma_{ik}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec

$$V'_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial f_j} \quad \text{et} \quad V_i(f) = V_i[f] + \sum_j \frac{\partial V_i[f]}{\partial f_j} \delta f_j.$$

Le premier terme (le terme de diffusion) de l'équation (2.57) est responsable de la croissance des fluctuations tandis que le deuxième terme (qui provient des coefficients de dérive) peut être interprété comme un terme de rappel qui s'oppose à une telle croissance et qui assure donc, dans les cas dans lesquels le système n'est pas instable, comme on verra mieux dans la suite, la convergence vers une valeur d'équilibre.

2.6 Théorie de la réponse linéaire

Dans cette partie du chapitre nous allons étudier plus avant les propriétés de l'équation de Boltzmann-Langevin.

Les petites déviations d'un système par rapport à son comportement moyen peuvent être décrites de façon simple dans le cadre de *la théorie de la réponse linéaire*. En fait, si l'on décompose la densité à un corps de la manière suivante

$$f = f_0 + \delta f$$

où f_0 est une solution de l'équation non fluctuante et δf la partie fluctuante, cette dernière obéit (à l'ordre le plus bas en δf) à l'équation [Pin89, Col94b, Ayi96]

$$\delta \dot{f} = \mathcal{M} \delta f + \mathcal{B}. \quad (2.58)$$

L'évolution de δf est donc régie par une équation différentielle linéaire stochastique. La matrice \mathcal{M} représente la matrice RPA dont la structure, dans le cas nucléaire et dans l'approximation semi-classique, est déterminée par l'interaction de champ moyen et éventuellement par l'intégrale de collision à deux corps. Le terme \mathcal{B} est la source du comportement aléatoire du système et peut être considéré comme la source des fluctuations. Dans le cadre de la théorie de Boltzmann-Langevin ce terme est lié au terme de collision fluctuant.

Il est très important de connaître les propriétés de la source de fluctuations, car les résultats finaux peuvent fortement en dépendre. Par exemple, un système qui passe par la région spinodale peut donner lieu à multifragmentation si des fluctuations de densité suffisamment grandes sont produites pendant l'évolution du système; mais si les fluctuations restent petites, le système peut ne pas avoir le temps de produire des fragments. En plus, si l'amplitude des fluctuations est bien comprise, il sera possible de développer des approches simplifiées, dans lesquelles le terme très compliqué de Langevin est remplacé par un terme plus simple d'amplitude équivalente.

2.7 La relation de dispersion

Considérons le cas de la matière nucléaire infinie à une densité et une température données. Dans cette situation simplifiée, pour des raisons de symétrie, toutes les perturbations sont associées à des ondes planes caractérisées par un nombre d'onde k .

Soient $\{\omega_k^\nu\}$ les valeurs propres de la matrice \mathcal{M} et $\{\delta f_k^\nu\}$ les vecteurs propres correspondants, où l'indice ν indique les différents modes (collectifs et non-collectifs) associés au même nombre d'onde k . Si on pose $\delta f = \sum_{k\nu} A_k^\nu \delta f_k^\nu$ et si

2.7 La relation de dispersion

on considère le cas simple de l'équation de Vlasov (dans laquelle le terme \mathcal{B} est zéro et l'intégrale de collision n'est pas pris en compte), il suit de l'équation (2.58) que l'évolution de l'amplitude des fluctuations A_k^ν est donnée par l'équation

$$\dot{A}_k^\nu = i\omega_k^\nu A_k^\nu \quad \forall k, \nu \quad (2.59)$$

et donc

$$A_k^\nu(t) = e^{i\omega_k^\nu t} A_k^\nu(0).$$

On s'aperçoit facilement qu'il y a deux possibilités : soit ω_k^ν est réel et les fluctuations ne sont ni amplifiées ni amorties, soit ω_k^ν est imaginaire et les fluctuations vont être soit amorties soit amplifiées exponentiellement. Le premier cas correspond à des situations dans lesquelles le système est stable, tandis que le deuxième peut correspondre à situations dans lesquels le système est instable (pour des valeurs négatives de ω_k^ν).

Pour le cas que l'on est en train de considérer (l'équation de Vlasov), nous pouvons écrire l'équation (2.58) dans la forme [Col94a]

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{p}}{m} + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta U}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (2.60)$$

où $\delta U = -\frac{\partial U}{\partial \rho} \delta \rho$. Comme $\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f_0}{\partial p^2} 2\mathbf{p}$ on obtient

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{\partial f_0}{\partial p^2} \frac{\partial U}{\partial \rho} 2\mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{h^3/4} \right) \delta f = 0. \quad (2.61)$$

Il est donc possible d'identifier la matrice \mathcal{M} dans l'équation (2.58) avec la partie entre parenthèses de l'équation (2.61).

En exécutant une transformation de Fourier dans la variable \mathbf{r} et en cherchant la solution particulière $e^{i\omega_k^\nu t} \delta f(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega_k^\nu)$, on parvient à une relation dans laquelle les différents nombres d'onde sont découplés et qui est valide pour $m\omega_k^\nu \neq \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}$:

$$\delta f^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega_k^\nu) = \left(\frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial \rho} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}/m}{\omega_k + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}/m} \right) \delta \rho^\nu(\mathbf{k}, \omega_k^\nu) \quad (2.62)$$

où la quantité $\partial U(\mathbf{k})/\partial \rho$ est la transformée de Fourier de $\partial U(\mathbf{r}')/\partial \rho(\mathbf{r})$; la partie entre parenthèses de cette relation nous permet de définir la structure en \mathbf{p} des fonctions propres δf_k^ν . Dans la suite, pour simplifier les notations, on omettra l'indice ν là où cette opération ne comporte pas d'ambiguïté. Il faudra toutefois se rappeler toujours de l'existence des différents modes associés au même nombre d'onde k . L'intégration en $d\mathbf{p}$ des deux membres de la relation (2.62) nous amène finalement à la *relation de dispersion* [Col94a, Pet88, Hei90, Pin89] qui relie les énergies associées aux différents modes $E_k = \omega_k$ avec les nombres d'onde \mathbf{k}

$$\left(\frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial \rho} \right)^{-1} = \int \frac{d\mathbf{p}}{h^3/4} \frac{\partial f_0}{\partial p^2} \frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{\omega_k + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}/m} \equiv \chi(\omega_k). \quad (2.63)$$

L'intégrale χ étant invariante par inversion de \mathbf{p} en $-\mathbf{p}$, les solutions de l'équation (2.63) apparaissent par couple ω_k et $-\omega_k$. Par ailleurs, nous pouvons aussi observer que $[\chi(\omega_k)]^* = \chi(\omega_k^*)$ et comme, pour vérifier la relation (2.63), il faut que $\chi(\omega_k)$ soit réelle, alors si ω_k est une solution, ω_k^* l'est aussi. On peut aussi démontrer que l'équation (2.63) a seulement des solutions soit réelles soit imaginaires pures.

Si nous résolvons l'équation (2.63) à température zéro, nous obtenons

$$\frac{s}{2} \ln \left(\frac{s+1}{s-1} \right) = 1 + \frac{1}{F_0(\mathbf{k})} \quad (2.64)$$

où $s = -E_k/kv_F$, $F_0(\mathbf{k}) = [\partial U(\mathbf{k})/\partial \rho]/(2\varepsilon_F/3\rho)$ est le paramètre de Landau et $\varepsilon_F = mv_F^2/2$ est l'énergie de Fermi et ρ la densité. Dans l'équation (2.64) le logarithme est défini dans le plan complexe avec une coupure sur l'axe réel négatif. Cela signifie que l'équation (2.64) est valide dans le plan complexe entier exception faite quand s se trouve sur l'axe réel entre -1 et 1 .

On obtient pour cette équation des solutions réelles ($s^2 > 1$) pour F_0 positive. Dans ce cas, tous les modes sont stables et ils se propagent à une vitesse plus grande que la vitesse de Fermi sans être ni amplifiés ni amortis.

Si maintenant on cherche des solutions imaginaires de la relation de dispersion $s = i\gamma$ (qui correspondent à un régime instable), on peut récrire la relation

$$\gamma \arctan \frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{1}{F_0(\mathbf{k})}. \quad (2.65)$$

Cette équation peut être résolue si $F_0(\mathbf{k}) < -1$, c'est-à-dire si la condition suivante est satisfaite

$$\frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial \rho} + \frac{2\varepsilon_F}{3\rho} < 0. \quad (2.66)$$

Les solutions de la relation de dispersion, pour les modes stables ($F_0 \geq 0$) et pour les modes instables ($F_0 \leq -1$) sont montrées dans la figure (2.1).

Une situation spéciale se produit pour $F_0 \in [0, 1]$. Dans ce cas-là, il est possible de démontrer [Col94a, Pet88, Hei90, Pin89] que la relation de dispersion n'a pas de solutions collectives. Il apparaît que, si l'on veut propager des ondes telles que $\omega \leq kp_F/m$, la singularité en $\omega = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}/m$ donne lieu à un amortissement des modes considérées. Cet effet peut être expliqué avec l'interaction entre l'onde et les particules du système. Comme, dans une situation d'équilibre, il y a plus de particules qui vont moins vite que l'onde plutôt que le contraire, il y aura un transfert d'énergie de l'onde vers les particules qui explique l'amortissement du mode. Cet effet est appelé "amortissement de Landau". Il est possible de continuer analytiquement la relation de dispersion. De cette façon, on obtient pour chaque valeur de F_0 dans la région $-1 < F_0 < 0$ une seule solution, qui est

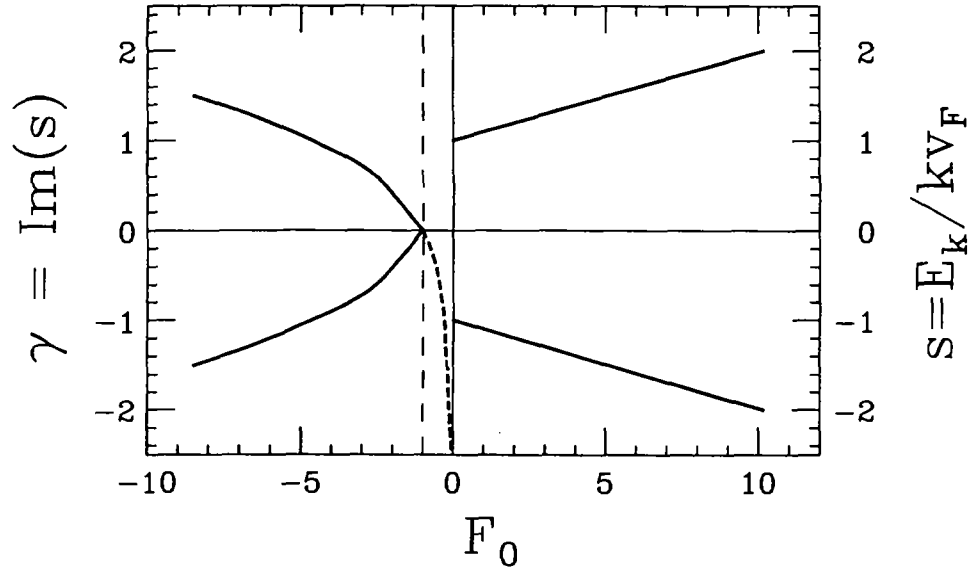


Figure 2.1: Solutions de la relation de dispersion en fonction de F_0 . Extraite de la référence [Col94a].

montrée toujours sur la figure (2.1). On peut remarquer que la partie relative à l'amortissement de Landau est la continuation de la branche due aux modes instables.

Finalement, nous pouvons noter que l'introduction du terme de collision dans l'équation de Vlasov rajoute un amortissement (i.e. une partie imaginaire positive) à la fréquence. Il est possible de comprendre qualitativement ce résultat en utilisant l'approximation du temps de relaxation, dans laquelle le terme de collision $I(f)$ est remplacé par $-\delta f/\tau_{coll}$. Ainsi, l'effet moyen des collisions est de changer les fréquences $\omega_k^\nu \equiv \omega_{cm,k}^\nu$ en $\omega_k^\nu = \omega_{cm,k}^\nu + i\omega_{coll} = \omega_{cm,k}^\nu + i/\tau_{coll}$. Si le système est très instable, cette correction n'est pas importante et la croissance des fluctuations est essentiellement dominée par le champ moyen instable.

2.8 Réponse à un bruit

Nous pouvons maintenant étudier l'effet des fluctuations introduites au moyen du terme stochastique \mathcal{B} . Pour faire cela nous résolvons l'équation (2.58) dans sa forme générale en introduisant le changement de variable $A_\mu(t) = a_\mu(t)e^{i\omega_\mu t}$. Ici nous considérons le cas général et l'indice μ comprend le mode k et tous les modes collectifs et non-collectifs qui sont lui associés. On obtient

$$\dot{a}_\mu(t) = \mathcal{B}_\mu(t) e^{-i\omega_\mu t} \quad (2.67)$$

où \mathcal{B}_μ est la décomposition du terme de bruit \mathcal{B} sur le mode μ ; c'est-à-dire que

$$\mathcal{B} = \sum_{\mu} \mathcal{B}_{\mu} \delta f_{\mu}.$$

L'équation (2.67) donne

$$a_{\mu}(t) = \int_0^t dt' \mathcal{B}_{\mu}(t') e^{-i\omega_{\mu} t'} + a_{\mu}(0). \quad (2.68)$$

Comme le terme de source provient d'un bruit markovien on peut écrire:

$$\prec \mathcal{B}_{\mu}(t) \mathcal{B}_{\mu'}^*(t') \succ = 2\mathcal{D}_{\mu\mu'}(t) \delta(t - t'). \quad (2.69)$$

On obtient alors les relations

$$\begin{aligned} \prec a_{\mu} a_{\mu'}^* \succ &= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \prec \mathcal{B}_{\mu}(t') \mathcal{B}_{\mu'}^*(t'') \succ e^{-i\omega_{\mu} t'} e^{i\omega_{\mu'}^* t''} + \prec a_{\mu}(0) a_{\mu'}^*(0) \succ \\ &= \int_0^t dt' 2\mathcal{D}_{\mu\mu'}(t') e^{-i(\omega_{\mu} - \omega_{\mu'}^*) t'} + \prec a_{\mu}(0) a_{\mu'}^*(0) \succ \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\prec a_{\mu} \dot{a}_{\mu'}^* \succ = 2\mathcal{D}_{\mu\mu'}(t) e^{-i(\omega_{\mu} - \omega_{\mu'}^*) t} \quad (2.71)$$

En utilisant la relation (2.70) on peut calculer *la fonction de corrélation à deux temps différents* $\sigma_{\mu\mu'}(t_1, t_2) \equiv \prec A_{\mu}(t_1) A_{\mu'}(t_2) \succ$ [Col94b]:

$$\sigma_{\mu\mu'}(t_1, t_2) = e^{i\omega_{\mu} t_1 - i\omega_{\mu'}^* t_2} \left(\int_0^{t_{\min}} dt 2\mathcal{D}_{\mu\mu'}(t) e^{-i(\omega_{\mu} - \omega_{\mu'}^*) t} + \sigma_{\mu\mu'}(0) \right) \quad (2.72)$$

où $t_{\min} = \min(t_1, t_2)$. Quand l'un des temps est égal à zéro, alors

$$\sigma_{\mu\mu'}(t, 0) = \sigma_{\mu\mu'}(0) e^{i\omega_{\mu} t}.$$

Dans ce cas, la corrélation contient des informations sur les énergies des états propres. Par exemple, si le système est stable on aura $\omega_{\mu} = \omega_{cm, \mu} + i\omega_{coll}$ et donc si on considère $\mu = \mu'$ on obtient

$$\sigma_{\mu}(t, 0) = \prec A_{\mu}(t) A_{\mu}^*(0) \succ = \prec A_{\mu}(0) A_{\mu}^*(0) \succ e^{-\frac{t}{\tau_{coll}}} e^{i\omega_{cm, \mu} t}. \quad (2.73)$$

L'étude de la fonction de corrélation du type $\prec \delta f(t) \delta f(0) \succ$ est donc bien adapté à la détermination de la constante τ_{coll} qui est liée au temps entre deux collisions.

L'étude de la *fonction de corrélation au même temps* est aussi très important. Cette quantité est définie par

$$\sigma_{\mu\mu'}(t, t) = \sigma_{\mu\mu'}(t) = e^{i(\omega_{\mu} - \omega_{\mu'}^*) t} \left(\int_0^t dt' 2\mathcal{D}_{\mu\mu'}(t') e^{-i(\omega_{\mu} - \omega_{\mu'}^*) t'} + \sigma_{\mu\mu'}(0) \right) \quad (2.74)$$

2.9 Réponse linéaire et instabilités

Comptes tenus de cette relation, il est clair que la fonction de corrélation $\sigma_{kk'}$ suit l'équation différentielle linéaire (appelée équation de LALIME) [Col94b]

$$\dot{\sigma}_{\mu\mu'}(t) = i\omega_{\mu\mu'}\sigma_{\mu\mu'} + 2\mathcal{D}_{\mu\mu'} \quad (2.75)$$

où a été introduite la définition $\omega_{\mu\mu'} \equiv \omega_{\mu} - \omega_{\mu'}^*$. Si on suppose que le terme de source $\mathcal{D}_{kk'}$ ne dépend pas du temps, l'équation (2.74) devient

$$\sigma_{\mu\mu'}(t) = i\frac{2\mathcal{D}_{\mu\mu'}}{\omega_{\mu\mu'}}(1 - e^{i\omega_{\mu\mu'}t}) + \sigma_{\mu\mu'}(0) e^{i\omega_{\mu\mu'}t}. \quad (2.76)$$

Si nous considérons les termes diagonaux dans le cas de systèmes stables, nous obtenons

$$\sigma_{\mu}(t) = \mathcal{D}_{\mu}\tau_{coll}(1 - e^{-2t/\tau_{coll}}) + \sigma_{\mu}(0) e^{-2t/\tau_{coll}}. \quad (2.77)$$

Il faut remarquer que, quand t tends vers l'infini, la quantité $\sigma_{\mu}(t)$ tends vers la valeur $\mathcal{D}_{\mu}\tau_{coll}$, déterminée par la nature du terme de source \mathcal{B} : quelle que soit la valeur de la constante $\sigma_{\mu}(0)$, c'est-à-dire, quelle que soit la perturbation initiale, elle va être supprimée avec une constante de temps caractéristique $\tau_{coll}/2$. En d'autres termes, si le système est stable, fluctuations de n'importe quelle nature, à l'exception de celles créées par \mathcal{B} , vont s'amortir rapidement pendant l'évolution du système. La théorie de la réponse linéaire montre donc comment la présence de fluctuations initiales est peu importante, car dans un régime de stabilité, elles vont être supprimées. En effet, très rapidement le système rejoint l'équilibre statistique donné par $\sigma_k = \mathcal{D}\tau_{coll}$. Cette relation est équivalente à la relation d'Einstein; les fluctuations à l'équilibre étant définies par la température, elles fournissent une relation entre la dissipation τ et la fluctuation \mathcal{D} .

2.9 Réponse linéaire et instabilités

Considérons maintenant le cas dans lequel le système présente des instabilités, i.e. les fréquences ω_k^* sont imaginaires. Nous avons vu (cf. §2.7) que la relation de dispersion associe à chaque mode k deux modes collectifs, donnant un amortissement exponentiel ou une croissance exponentielle. Par convention, les fréquences reliées aux deux effets sont indiquées avec $-i\omega_{cm,k}^-$ et $-i\omega_{cm,k}^+$ respectivement, où $\omega_{cm,k}^+ = -\omega_{cm,k}^-$. Quand l'instabilité est assez importante la croissance exponentielle va rapidement dominer. Dans ce cas, nous pouvons introduire le temps d'instabilité $\tau_k = 1/(\omega_{cm,k}^+ - \omega_{coll})$ où nous avons pris en compte les effets de l'amortissement dû aux collisions. Dans cette situation, la solution de l'équation (2.72) devient

$$\sigma_k(t) = \prec A_k A_k^* \succ = \mathcal{D}_k \tau_k (e^{2t/\tau_k} - 1) + \sigma_k(0) e^{2t/\tau_k}. \quad (2.78)$$

On observe donc une divergence des fonctions de corrélation, car toutes les fluctuations, y comprises les initiales, sont amplifiées.

Regardons plus en détail ce type de phénomène qui, comme nous allons le voir, est responsable de la decomposition spinodale.

Nous avons précédemment résolu la relation de dispersion pour un système infini à température nulle et nous avons ainsi obtenu la condition d'instabilité (2.66). A la limite de basse température ($T \ll \varepsilon_F$) la résolution de la relation de dispersion conduit à la condition d'instabilité

$$\rho \left(\frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial \rho} + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{\rho} + \frac{\pi^2}{18\varepsilon_F} \frac{T^2}{\rho} \right) < 0. \quad (2.79)$$

A la limite des grandes longueurs d'onde ($\mathbf{k} \rightarrow 0$), les relations (2.66) et (2.79) correspondants à la condition d'instabilité mécanique définissant la région spinodale

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T < 0. \quad (2.80)$$

2.10 Prédiction de la réponse linéaire pour la matière nucléaire

La relation de dispersion (2.65) prédit, dans le cas d'un potentiel local, un temps d'instabilité $\tau_k = 1/\omega_k$ proportionnel à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$: plus la longueur d'onde est petite, plus l'instabilité est rapide; à la limite des longueurs d'onde très courtes l'instabilité serait instantanée. Ce résultat non-physique vient du fait qu' une interaction sans portée n'introduit aucune échelle de longueur.

Il est possible de retrouver une situation physique en introduisant une portée finie dans le champ moyen. A densité normale, cette portée finie va générer une énergie de surface. Cette énergie de surface ne permet pas de former de trop petits fragments. Elle introduit ainsi, comme on verra mieux dans la suite, une coupure ultra-violette naturelle dans la relation de dispersion.

La manière la plus simple d'introduire un potentiel avec une portée finie est de convoluer un potentiel local avec une fonction g (par exemple avec une gaussienne). La portée de cette fonction peut être choisie de façon d'obtenir la bonne énergie de surface (à la densité normale)

$$U \rightarrow U \otimes g.$$

Dans ce cas, le paramètre F_0 et la condition d'instabilité vont dépendre de k . Donc pour des conditions de densité et de température du système fixées, dans la région spinodale, il y aura une valeur limite k_{lim} de k qui correspond à la condition $F_0^{k_{lim}} = 1$ au-dessus de laquelle les modes ne sont plus instables. De plus, entre 0 et k_{lim} , il y aura un maximum de la fréquence ω_k (ou une valeur

2.10 Prédiction de la réponse linéaire pour la matière nucléaire

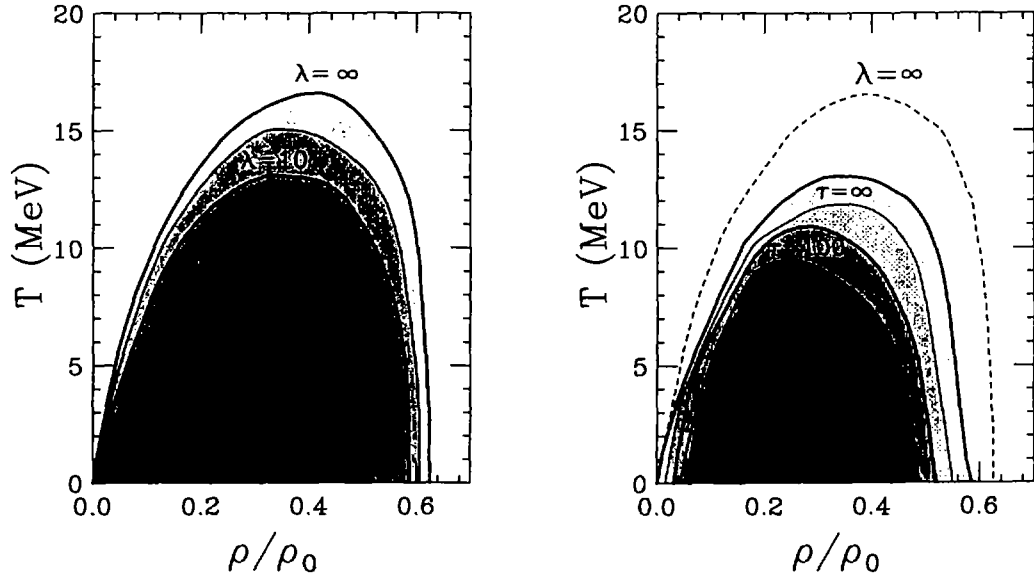


Figure 2.2: A gauche, limites de la region spinodale pour des valeurs différentes de la longueur d'onde λ . A droite, contours correspondant aux mêmes valeurs du temps d'instabilité τ , pour $\lambda = 10 \text{ fm}$. Extraites de la référence [Col94a].

minimale du temps d'instabilité $\tau_k = 1/\omega_k$) qui va définir le mode le plus instable k_{max} .

La figure (2.2)(à gauche) montre la région d'instabilité spinodale pour la matière nucléaire infinie pour $k = 0$ et pour des modes correspondant à différentes valeurs de k (et donc de λ). Dans ce calcul [Col94a], la fonction de convolution utilisé est une gaussienne de la forme $\exp(-r^2/2a^2)$ et le potentiel de champ moyen est un potentiel à la Skyrme dont les détails seront donnés dans la suite (cf. §3.2). Il est possible d'observer que, au fur et à mesure que λ augmente, la région spinodale devient de plus en plus petite; cela peut être expliqué par le fait que les oscillations caractérisées par une longueur d'onde plus petite que la portée a de la force ne peuvent pas être instables. Il est alors clair que les caractéristiques de la relation de dispersion dépendent fortement du valeur du paramètre a . La valeur ici utilisée donne une valeur de l'énergie de surface proche de celle du modèle de goutte liquide et tient aussi bien compte de certains effets quantiques (comme cela est discuté dans la référence [Ayi95]).

Sur la figure (2.2) (à droite) sont représentées les lignes de niveau pour les temps τ dans le plan (ρ, T) pour une valeur donnée $\lambda = 10 \text{ fm}$ de la longueur d'onde. La courbe correspondant à $\tau = \infty$ représente la limite de la région spinodale pour la longueur d'onde considérée. Il est possible de voir que, quand le mode commence à être instable, son temps d'instabilité est infini. Donc dans la réalité il est stable. En fait, dans le cas des réactions nucléaires un mode peut

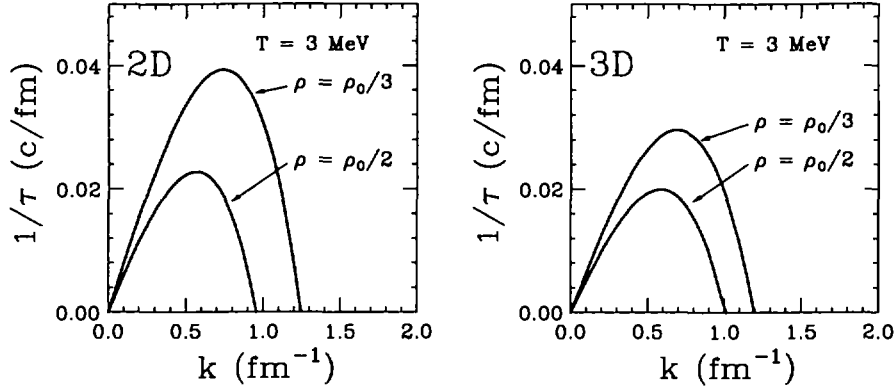


Figure 2.3: La relation de dispersion nucléaire à $T = 3 \text{ MeV}$ pour $\rho = \rho_0/2$ et $\rho = \rho_0/3$ à deux dimensions (à gauche) et à trois dimensions (à droite).

être considéré dynamiquement instable quand son temps d'instabilité est plus petit que les temps caractéristiques de la réaction. Si on suppose que pour des collisions entre ions lourds ces temps peuvent être situés autour de 50-100 fm/c, on s'aperçoit que la région dynamiquement instable est beaucoup plus petite que celle statique.

Finalement, la figure (2.3) montre la relation de dispersion pour la matière nucléaire infinie pour des valeurs données de la température et de la densité, dans le cas bidimensionnelle et tridimensionnelle. En particulier nous avons considéré une température de 3 MeV et deux valeurs de la densité: $\rho = \rho_0/2$ et $\rho = \rho_0/3$. Nous pouvons observer que, dans les deux cas, dans un large domaine à l'intérieur de la région spinodale les modes les plus instables sont caractérisés par des longueurs d'onde autour de $\lambda = 10 \text{ fm}$, auxquelles sont associées des temps d'instabilité typiquement entre $\tau = 30 \text{ fm/c}$ et $\tau = 50 \text{ fm/c}$.

2.10.1 Fluctuations et coefficient de diffusion

Nous allons maintenant chercher l'expression des termes de source de fluctuations dans le cadre de la théorie de Boltzmann-Langevin. Il est possible de traiter ce problème avec la technique de la fonction de réponse développée dans la référence [Ayi96].

Nous avons à résoudre l'équation (2.58), dans laquelle le terme général \mathcal{B} a été remplacé par le terme de collision fluctuant de Boltzmann-Langevin

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k + i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} - i \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \rho_k = \delta I_k \quad (2.81)$$

2.10 Prédiction de la réponse linéaire pour la matière nucléaire

où

$$f_k \equiv f_k(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

est la transformée de Fourier de $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ et de façon analogue δI_k est la transformée de Fourier de $\delta I(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ et $\rho_k = \int d\mathbf{p} f_k(\mathbf{p}, t)$ est la transformée de Fourier de la densité de matière $\rho(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{p} f_k(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

Si maintenant on considère la transformée de Fourier par rapport au temps de l'équation (2.81), on obtient

$$i \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} - \omega \right) f_k(\mathbf{p}, \omega) - i \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \rho_k(\omega) = \delta I_k(\mathbf{p}, \omega). \quad (2.82)$$

Il est possible d'introduire la susceptibilité

$$\epsilon(\omega) \equiv 1 - \int d\mathbf{p} \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} - m\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (2.83)$$

Les solutions de l'équation (2.82) peuvent alors être écrites comme simple projection du bruit

$$\rho_k(\omega) \equiv \int d\mathbf{p} f_k(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{i}{\epsilon(\omega)} \int d\mathbf{p} \frac{\delta I_k(\mathbf{p}, \omega)}{\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} - \omega}. \quad (2.84)$$

La composante de Fourier de la densité peut être maintenant obtenue en considérant la transformation inverse

$$\rho_k(t) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \rho_k(\omega) = \int_0^\infty dt' \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(t'-t)}}{\epsilon(\omega)} \int d\mathbf{p} \frac{\delta I_k(\mathbf{p}, \omega)}{\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} - \omega}. \quad (2.85)$$

Ici l'intégrale doit être calculé le long d'un chemin du plan complexe qui passe au-dessus de tous les pôles de l'intégrande. Les pôles sont déterminés par la condition $\epsilon(\omega_k) = 0$ qu'on reconnaît être la relation de dispersion (2.64). Le résidu de l'inverse de la susceptibilité est lié à

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_k^\nu} = - \int d\mathbf{p} \frac{f_k^\nu(\mathbf{p})}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m - \omega_k^\nu} = - \langle Q_k^\nu | f_k^\nu \rangle \quad (2.86)$$

où on a introduit les fonctions

$$Q_k^\nu(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m - (\omega_k^\nu)^*}$$

et

$$f_k^\nu = \frac{\partial U(\mathbf{k})}{\partial \rho} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m\omega_k + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}$$

et la notation $\langle \mid \rangle$ pour l'intégrale sur \mathbf{p} .

Nous pouvons maintenant écrire le résultat (2.85) sous la forme compacte

$$\rho_k(t) = \int_0^t dt' \sum_{\nu} e^{i\omega_k^{\nu}(t'-t)} \frac{\langle Q_k^{\nu} | \delta I_k(t') \rangle}{\langle Q_k^{\nu} | f_k^{\nu} \rangle} = \sum_{\nu} A_k^{\nu}(t) \quad (2.87)$$

où la dernière relation vient du fait qu'on peut écrire $\rho_k(t) = \sum_{\nu} A_k^{\nu}(t) \rho_k^{\nu}$ et qu'on a choisi une normalisation de ρ_k^{ν} à 1. D'après la relation (2.87) on peut donc écrire que

$$A_k^{\nu}(t) = \int_0^t dt' e^{i\omega_k^{\nu}(t'-t)} \frac{\langle Q_k^{\nu} | \delta I_k(t') \rangle}{\langle Q_k^{\nu} | f_k^{\nu} \rangle}.$$

A cause de la nature stochastique de la dynamique, il faut considérer la moyenne sur l'ensemble des évolutions possibles. Nous savons que la moyenne d'ensemble du terme de bruit de l'équation de Boltzmann-Langevin est nulle, $\langle \delta I_k(\mathbf{p}, t) \rangle = 0$, et donc $\langle A_k^{\nu}(t) \rangle = 0$.

Si on se rappelle de la nature locale dans l'espace et dans le temps du terme de bruit dans l'équation de Boltzmann-Langevin, on obtient que

$$\langle \delta I_k(\mathbf{p}, t) \delta I_{k'}^*(\mathbf{p}', t') \rangle = 2D(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(t - t') \delta_{kk'}$$

et on s'aperçoit que les termes de bruit pour les différents modes sont décorrélés et qu'on peut juste considérer la fonction de corrélation entre les modes collectifs correspondants à la même valeur de k . On obtient alors

$$\begin{aligned} \sigma_k^{\nu\nu'}(t) &= \frac{\langle Q_k^{\nu'} | 2D | Q_k^{\nu} \rangle}{\langle Q_k^{\nu} | f_k^{\nu} \rangle \langle f_k^{\nu'} | Q_k^{\nu'} \rangle} \int_0^t dt' e^{i[\omega_k^{\nu} - (\omega_k^{\nu'})^*](t'-t)} \\ &= 2\mathcal{D}_k^{\nu\nu'} \int_0^t dt' e^{i[\omega_k^{\nu} - (\omega_k^{\nu'})^*](t'-t)}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Nous avons donc vu que la dynamique de Boltzmann-Langevin peut être traitée dans le cadre de la réponse linéaire et que ce traitement peut être utilisé pour étudier et comprendre la première phase de la décomposition spinodale. En fait, même si au début tous les modes sont amplifiés selon les coefficients de diffusion microscopique $D(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, seul le mode collectif amplifié va dominer après un temps plus long que le temps caractéristique τ_k . En effet, le mode collectif amorti va rapidement s'amortir, tandis que les modes non collectifs n'ont pas de croissance exponentielle. Donc, si on est intéressé au comportement à longs termes, alors il suffit de considérer juste le mode collectif amplifié. C'est pour ça que l'on se concentre sur la quantité \mathcal{D}_k^{++} .

2.10 Prédiction de la réponse linéaire pour la matière nucléaire

Chapitre 3

Les méthodes numériques

3.1 Les simulations sur réseau

Dans les dernières années, un grand effort a été fait pour essayer d'introduire les fluctuations dans la dynamique de la fonction à un corps sur la base des approches proposés par Ayik et Grégoire [Ayi88, Ayi90] et par Randrup et Remaud [Ran90], introduites au chapitre 2.

Nous rappelons ici que l'équation de Boltzmann-Langevin (2.40) contient trois termes: le premier est le terme de Vlasov qui donne lieu à l'évolution déterministe de la fonction de distribution à un corps, c'est-à-dire qu'une distribution initiale donnée produit une évolution dynamique unique; le deuxième est l'intégral des collisions, qui donne l'effet moyen des collisions à deux corps et qui, lui aussi, est complètement déterministe; et enfin, le terme de collision fluctuant qui est responsable de l'évolution stochastique de la fonction de distribution à un corps.

Les collisions à deux corps sont donc supposées produire une séquence stochastique de transitions dans le système. Le nombre moyen $d\bar{\nu}$ par unité de temps de ces transitions, supposées locales dans l'espace et dans le temps, est donné par l'expression (cf. l'équation 2.50)

$$d\bar{\nu}_{1,2;3,4} = ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 f_1 f_2 \bar{f}_3 \bar{f}_4 w(12;34) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_1) \quad (3.1)$$

ce qui donne pour un temps Δt et des cellules $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta s_4$, un nombre de collisions

$$\bar{\nu} = \Delta t \int_{\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta s_4} d\bar{\nu}.$$

Ces processus sont considérés indépendants et le nombre ν de transitions qui ont lieu réellement dans un certain intervalle de temps est donnée par la distribution de Poisson. En conséquence, la variance du nombre de transitions

3.1 Les simulations sur réseau

est égale au nombre moyen

$$\sigma_v^2 = \bar{v}. \quad (3.2)$$

L'évolution de la distribution des densités à un corps est donc diffusive, dans le sens que, même si on part d'un seul point de l'espace des densités à un corps, les collisions stochastiques à deux corps vont générer, au cours du temps, toute une distribution de points. Quand on veut mettre en œuvre ce schéma, il est très important de bien simuler le processus stochastique de base, compte tenu du fait que l'on a une distribution continue de nucléons dans l'espace des phases. Par exemple, une façon souvent utilisée pour avoir des distributions f continues est de remplacer chaque nucléon par un ensemble de ce que l'on appelle des particules test, qui dans cette situation vont représenter une fraction de nucléon. Dans ce cas, il est très important de s'assurer que la relation entre la variation moyenne et les fluctuations soit préservée.

Il est possible de voir que la méthode habituelle de particule test pose des problèmes de ce point de vue. En fait, dans cette prescription chaque nucléon est remplacé par N_{pt} particules test dont la section efficace a été réduite convenablement de façon à avoir un taux de collisions moyen correct. Les particules test évoluent alors comme des particules individuelles. Puisque les collisions entre couples de particules test sont indépendantes, la variance dans le nombre de transitions élémentaires est égale à son nombre moyen, quand elle est exprimée en terme de particules test. Mais, si on la réexprime en termes des nucléons (qui sont les particules physiques), la variance sera N_{pt} fois trop petite.

Une méthode, développée par Chomaz, Burgio et Randrup [Cho91, Bur91], pour essayer de résoudre ce problème, consiste à représenter la distribution à un corps $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ sur un réseau dans l'espace des phases. De cette façon le caractère continu de f est préservé et le problème d'échelle lié à l'utilisation des particules test est évité. Dans cette méthode l'espace des phases est sous-divisé dans un réseau de cellule.

- i) La propagation de Vlasov est obtenue en faisant évoluer la fonction f discrétisée, par une méthode matricielle, d'abord en \mathbf{r} et ensuite en \mathbf{p} (voir la référence [Bur95] pour plus de détails). Cette méthode est très précise et conserve parfaitement le nombre de particules, l'impulsion et l'énergie. De plus, elle n'introduit aucune fluctuation numérique.
- ii) Le terme de collision est calculé en additionnant toutes les collisions élémentaires possibles, données par l'équation 3.1.
- iii) Le terme stochastique est produit en ajoutant à toutes les collisions possibles une fluctuation choisie au hasard dans une distribution gaussienne de valeur moyenne nulle et dont la variance est donnée par la relation 3.2.

Il faut remarquer que cette procédure requiert que toutes les collisions possibles soient prises en compte et que le nombre de collisions soit déterminé stochas-

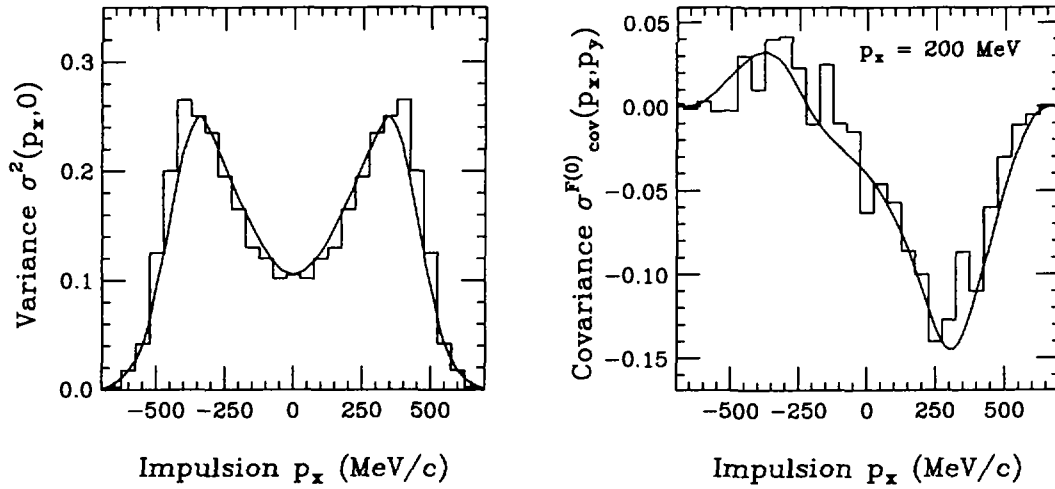


Figure 3.1: Comparaison entre les résultats d'un traitement de type Boltzmann-Langevin sur réseau (histogramme) et les prédictions de la mécanique statistique (courbe) pour la variance (à gauche) [Bur91] et la covariance (à droite) [Bur94a] d'un gaz de Fermi.

tiquement. Cette méthode est très différente de celle utilisant des particules test, pour laquelle on tient compte seulement d'un état final, choisi aléatoirement. La nécessité d'estimer toutes les collisions possibles augmente très fortement les temps de calcul d'une méthode sur réseau. C'est la raison qui a limité jusqu'à maintenant l'utilisation de cette méthode à des problèmes à deux dimensions.

Même avec la limite que l'on vient de citer, ce type de simulation a été toutefois capable d'élucider des points importants concernant la théorie de Boltzmann-Langevin. Par exemple, il a été possible de vérifier que, quelle que soit la distribution initiale en \mathbf{p} , l'évolution de Boltzmann-Langevin conduit le système vers la distribution d'équilibre statistique tant pour les valeurs moyennes que pour les fluctuations et corrélations [Bur91, Bur94a] (voir la figure (3.1)).

3.2 Une simulation BUU rapide et fiable: le code TWINGO

Nous avons vu que l'utilisation de la méthode sur réseau pour la résolution de l'équation de Boltzmann-Langevin pose des problèmes du point de vue du temps de calcul, quand on veut l'appliquer à des systèmes réalistes à trois dimensions. Pour le moment la seule alternative possible, si nous voulons poursuivre dans la même direction, est d'utiliser des résolutions basées sur la méthode des particules test, dans lesquelles une source de stochasticité qui reproduit certaines propriétés

3.2 Une simulation BUU rapide et fiable: le code TWINGO

du terme aléatoire de Boltzmann-Langevin est introduite. C'est la voie que nous avons suivie. Toutefois, dans ce but, il nous fallait avoir un code très rapide et fiable; en fait, pour produire un ensemble statistique sur lequel appliquer nos analyses, il nous fallait générer le nombre le plus grand possible d'événements. Nous avons donc entièrement écrit et testé un code résolvant l'équation BUU, que nous avons appelé TWINGO, qui a la caractéristique d'être rapide, sans pour cela perdre en fiabilité.

Il s'agit d'un code de type BUU utilisant donc la "méthode des particules test" [Won82, Ber88]. L'idée de base est de représenter la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ par un grand nombre (N_{pt} pour chaque nucléon) de particules test; donc

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{N_{pt}} \sum_{n=1}^{AN_{np}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n).$$

Dans cette méthode le nombre de particules test par nucléon est donc un paramètre simplement numérique qui doit être choisi assez grand pour rendre la fonction f suffisamment douce et éviter les erreurs numériques mais pas trop grand pour que les calculs soient possibles du point de vue du temps de machine. Il y a essentiellement trois points sur lesquels nous avons travaillé pour rendre le code plus rapide. Ils concernent la façon de traiter la propagation dans le champ moyen, le champ coulombien et l'intégrale de collision.

Le champ moyen que nous avons utilisé est une simple paramétrisation à la Skyrme, mais qui contient une portée finie via l'introduction d'une densité convoluée $\hat{\rho}$

$$U(\mathbf{r}) = A \left(\frac{\hat{\rho}(\mathbf{r})}{\rho_0} \right) + B \left(\frac{\hat{\rho}(\mathbf{r})}{\rho_0} \right)^\sigma$$

où $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ est la densité de saturation de la matière nucléaire. Les paramètres $A = -356$, $B = 303$ et $\sigma = 7/6$ sont directement relié à l'équation d'état nucléaire et correspondent à une équation d'état "molle" ($K=200 \text{ MeV}$) proche des valeurs les plus couramment admises [Bla95, Bla76].

Pour l'application au cas nucléaire, a été ajouté un terme coulombien dont on parlera dans la suite et un terme qui tient compte des effets d'isospin.

Pour le traitement de la propagation de Vlasov nous avons choisi d'utiliser la méthode dite "lattice - hamiltonian" introduite par Lenk et Pandharipande [Len89]. Elle consiste à calculer la densité moyenne au centre de sites d'un réseau cubique tridimensionnel

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}_\alpha) \equiv \sum_{i=1}^{AN_{pt}} S(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_i)$$

où \mathbf{r}_α est la position du site d'indice α . La fonction S utilisée est

$$S(\mathbf{r}) = \frac{1}{N_{pt}(nl)^6} g(x)g(y)g(z) \quad (3.3)$$

$$g(q) = (nl - |q|)\Theta(nl - |q|) \quad (3.4)$$

où l est la dimension des sites du réseau, Θ est la fonction de Heaviside et n est un entier qui détermine la portée de S sur le réseau. Ce choix de la fonction S est très important, car elle détermine la propriété que, indépendamment de \mathbf{r} ,

$$l^3 \sum_{\alpha} S(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}) = \frac{1}{N_{pt}}$$

et donc que, à tous les temps le nombre de particules est exactement conservé

$$l^3 \sum_{\alpha} \rho_L(\mathbf{r}_{\alpha}) = A.$$

Ces conditions sont loin d'être vérifiées pour un choix arbitraire de la fonction S , comme une gaussienne. Il faut aussi noter que la fonction S introduit une portée effective dans le champ moyen.

Le hamiltonien total du système est donné par

$$H = \sum_{i=1}^{AN_{pt}} \frac{p_i^2}{2m} + N_{pt}V$$

où V est l'énergie totale d'interaction. Les particules bougent alors selon les équations du mouvement de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\mathbf{r}_i}{m} \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= -\nabla_i H = -N_{pt} \nabla V = -N_{pt} \sum_{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \hat{\rho}_{\alpha}} \nabla_i \hat{\rho}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Pour avoir plus de précision dans la pratique nous faisons évoluer dans le temps les particules selon l'algorithme du "saut de mouton" (aussi appelé Runge-Kutta) [Ber88]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t + \Delta t) &= \mathbf{r}(t - \Delta t) + 2\Delta t \frac{\mathbf{p}(t)}{m} \\ \mathbf{p}(t + 2\Delta t) &= \mathbf{p}(t) + 2\Delta t \mathbf{F}(t + \Delta t). \end{aligned}$$

La méthode nous permet ainsi d'avoir une bonne conservation de l'énergie aussi bien qu'une réduction des temps de calcul, qui, pour cette partie, sont linéaires avec le nombre de particules. Une bonne conservation de l'impulsion est obtenue (voir la référence [Len89]) en utilisant une valeur de $n = 2$ dans le facteur de forme (3.3).

Il faut remarquer que l'introduction du facteur de forme dans la densité introduit de façon naturelle des gradients de densité et donc des effets de surface. La variance associée au facteur de forme utilisé est d'environ $0.9 fm$ qui donne une

3.2 Une simulation BUU rapide et fiable: le code TWINGO

relation de dispersion pour la matière nucléaire avec les bonnes caractéristiques (cf. §2.10 et la référence [Ayi95]).

Pour effectuer des simulations réalistes, il faut tenir compte de l'interaction coulombienne. Cette prise en compte peut devenir très lourde: en fait, si l'interaction est calculée pour chaque couple de particules, les temps de calcul vont vite augmenter comme le carré du nombre de particules utilisées. Nous avons choisi une autre méthode. Il s'agit de calculer le potentiel coulombien en inversant l'équation de Poisson

$$\Delta V_{coul} = -4\pi\rho_p$$

où V_{coul} est le potentiel coulombien et ρ_p la densité de protons. A partir donc de la connaissance de la densité de protons (calculée au même temps et avec la même méthode que la densité de particules) et grâce à la méthode des gradients conjugués [Gil81], qui permet d'inverser rapidement le laplacien, nous pouvons calculer le potentiel coulombien dans chaque point du réseau et l'utiliser pour la propagation de champ moyen.

Finalement, le calcul de l'intégrale des collisions est basé sur une méthode Monte-Carlo qui tient compte du libre parcours moyen des nucléons dans le milieu [Bon94]. De plus, il est calculée avec la méthode des "ensembles parallèles" [Ber88]. Dans cette méthode N_{pt} ensembles de A nucléons sont définis et les collisions sont possibles seulement entre les nucléons du même ensemble. Cette méthode par rapport à celle de "l'ensemble global" [Gre87], dans laquelle un seul ensemble de AN_{pt} nucléons existe et les collisions sont possibles entre tous les nucléons de l'ensemble, permet d'un côté d'utiliser directement la section efficace σ_{nn}^1 , tandis que l'autre nécessite la réduction de la section efficace d'un facteur $1/N_{pt}$, et de l'autre côté permet de réduire, elle aussi, le temps de calcul. Nous avons testé que les méthodes des ensembles parallèles et de l'ensemble global donnent toujours des résultats proches.

Le code ainsi construit est effectivement très performant. Il permet d'obtenir un événement, utilisant autour de 10000 particules test et suivi pendant 400 itérations en temps, en environ 15 minutes de temps machine sur une station alpha.

Maintenant le problème qui se pose est quel bruit introduire dans le code, afin d'obtenir une approche stochastique satisfaisante.

¹Dans nos calculs, la section efficace utilisée est la section efficace "libre" $\sigma_{nn} = 41 \text{ mb}$.

3.3 Méthodes d'introduction du bruit

3.3.1 Bruit dans les conditions initiales: méthodes TNT et SIM

Nous avons vu au paragraphe 2.9 que l'évolution des fluctuations d'un système instable est donnée à la limite de la réponse linéaire par

$$\sigma_k(t) = \mathcal{D}_k \tau_k (e^{2t/\tau_k} - 1) + \sigma_k(0) e^{2t/\tau_k}. \quad (3.5)$$

où \mathcal{D}_k est le terme de source des fluctuations τ_k est le temps d'instabilité du mode k considéré et $\sigma_k(0)$ représente la fluctuation initiale. Il est évident que, à des temps suffisamment longs, les termes $\mathcal{D}_k \tau_k$ et $\sigma_k(0)$ jouent un rôle similaire. Il est donc possible de remplacer la source "physique" \mathcal{D}_k par un bruit initial $\sigma_k(0)$ approprié.

La méthode des particules test pour résoudre l'équation BUU, comme chaque nucléon est représenté comme un ensemble de N_{pt} particules test, contient toujours (pour un nombre fini de particules test) des fluctuations (qui sont dues à l'échantillonnage). De plus, la stochasticité de l'intégrale des collisions introduit aussi des fluctuations, qui sont réduites d'un facteur N_{pt} . Quand le système ne se trouve pas dans la région spinodale, les fluctuations ne sont pas très importantes parce qu'elles ne sont pas amplifiées (mais plutôt amorties); donc la méthode arrive à bien décrire la dynamique. Au contraire, quand le système est instable, tout type de fluctuation peut être important, car elles sont amplifiées.

L'idée proposée par les auteurs de la référence [Col93] a été d'ajuster soigneusement les fluctuations numériques (c'est-à-dire le nombre de particules test N_{pt}) de façon à simuler les fluctuations physiques. Cette idée a été testée dans un cas idéal à deux dimensions. A deux dimensions, en fait, il était possible de comparer les résultats avec un calcul qui a démontré sa robustesse, le calcul sur réseau.

Puisque les fluctuations dans la densité introduites par l'utilisation d'un nombre limité de particules test est de nature statistique, elles peuvent être calculées de façon assez simple. Si n est le nombre de particules test présentes dans un volume V , la fluctuation de cette quantité autour de sa valeur moyenne $\bar{n} = \rho V N_{pt}$ (fixée par la valeur initiale bien spécifiée de la densité) aura une variance égale à la valeur moyenne $\sigma_n^2 = \bar{n}$. Par conséquent, la fluctuation de la densité est donnée par

$$\sigma_\rho^2 = \frac{n}{V^2 N_{pt}}.$$

Donc le bruit numérique se réduit comme $1/N_{pt}$ et il est possible de choisir le nombre de particules test de façon à reproduire la valeur de la source physique \mathcal{D}_k , pour une valeur particulière de k .

3.3 Méthodes d'introduction du bruit

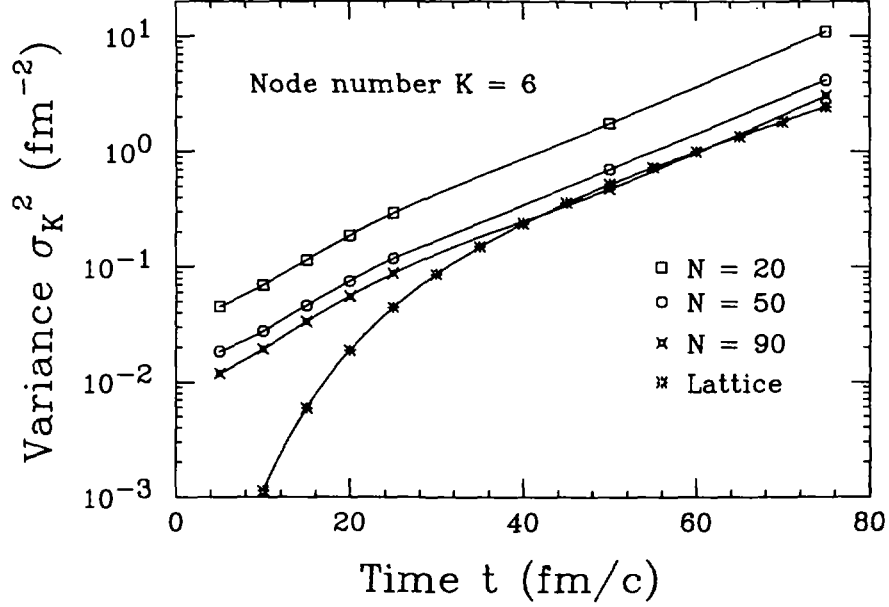


Figure 3.2: Evolution temporelle de la variance des fluctuations associées au mode les plus instable pour le calcul BL sur réseau et pour les simulations du type BUU avec trois valeurs différentes du nombre de particules test par nucléon. Extraite de la référence [Col93].

Dans la théorie de Boltzmann-Langevin, l'évolution asymptotique de la valeur des fluctuations provenant du terme de collision stochastique est donnée par $\mathcal{D}_k \tau_k$, tandis que dans la simulation avec les particules test la valeur asymptotique est $\mathcal{D}_k \tau_k / N_{pt} + \sigma_k(0)$. Donc la comparaison des deux valeurs permet d'obtenir la valeur de N_{pt} .

L'étude des simulations effectuées avec des nombres de particules test différents a permis de montrer que cette méthode simple (que dans la suite nous appellerons TNT [Test-particles Noise Tuning]) permet de simuler correctement les calculs de type Boltzmann-Langevin (voir la figure (3.2) et la référence [Col93] pour plus de détails).

La meilleure reproduction de l'évolution de Boltzmann-Langevin était obtenue pour une valeur de N_{pt} très proche de celui déduit de la comparaison des deux termes de bruit dans le cas particulier considéré.

La méthode que l'on vient d'expliquer peut être légèrement modifiée sans avoir recours au bruit numérique associé aux particules test. On s'aperçoit en effet que plus la quantité $\mathcal{D}_k \tau_k$ est grande plus le nombre N_{pt} de particules test par nucléon fournissant un bruit comparable est petit: il y aura la possibilité d'avoir des situations dans lesquelles le nombre de particules test est si petit que la dynamique ne serait plus fiable. La méthode alternative consiste à introduire

dans la densité initiale un bruit additionnel qui satisfait à la condition

$$\Delta\sigma_k(0) = \mathcal{D}_k\tau_k$$

pour les modes les plus instables. Dans la suite, cette méthode sera indiquée avec le sigle SIM (Stochastic Initialisation Method). La limitation de cette méthode est que le bruit ne peut pas être ajusté pendant l'évolution dynamique: nous pouvons introduire ce bruit pour un système qui se trouve dans une région instable, mais si on veut suivre la dynamique entièrement à partir des deux noyaux initiaux la méthode ne peut pas s'appliquer. En effet dans ce cas-là il faut pouvoir introduire le bruit quand et où le système rentre dans la région instable, car le bruit initiale sera rapidement amorti.

3.3.2 La dynamique brownienne à un corps (BOB)

Dans le but d'introduire les fluctuations non seulement dans la condition initiale, mais aussi dans la dynamique, nous avons développé récemment une nouvelle méthode [Cho94].

Cette méthode est directement inspirée des traitements "à la Langevin" du mouvement brownien et peut être considérée comme un prolongement du travail de Balian et Vénéroni [Bal81]. Elle consiste à remplacer la partie stochastique de l'intégrale de collision δI par l'effet d'une force aléatoire δF , de façon à reproduire la dynamique prédite par la théorie de Boltzmann-Langevin complète, tout au moins pour certains modes collectifs reconnus importants. En particulier, afin d'étudier comment la décomposition spinodale d'un système nucléaire en expansion conduit à sa multifragmentation, nous imposons que la dynamique des modes instables les plus importants soit bien reproduite, pour chaque densité et température dans la région spinodale.

L'idée de base est donc de remplacer le terme de collision stochastique δI de l'équation de Boltzmann-Langevin (2.40) par un terme "ad hoc" qui provient d'un potentiel stochastique à un corps $\delta U(\mathbf{r}, t)$. Si une fluctuation est introduite dans le champ moyen

$$U^{(m)}(\mathbf{r}, t) = U[f^{(m)}](\mathbf{r}) + \delta U^{(m)}(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

alors on peut écrire l'équation de Vlasov stochastique

$$\frac{\partial \delta f^{(m)}}{\partial t} + \frac{\partial \delta f^{(m)}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \delta f^{(m)}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial U^{(m)}}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

soit

$$\frac{\partial \delta f^{(m)}}{\partial t} + \frac{\partial \delta f^{(m)}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \delta f^{(m)}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial U[f^{(m)}]}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \delta U^{(m)}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \mathbf{p}} \equiv -\delta \mathbf{F}^{(m)} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \mathbf{p}}.$$

3.3 Méthodes d'introduction du bruit

Le remplacement qu'il faut faire dans l'équation de Boltzmann-Langevin est donc

$$\delta I^{(m)}[f^{(m)}] \rightarrow \delta \tilde{I}^{(m)}[f^{(m)}] = -\delta \mathbf{F}^{(m)} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.7)$$

où $\delta \mathbf{F}^{(m)}$ est la force brownienne, qui dérive du potentiel δU et dont la valeur moyenne est zéro ($\langle \delta \mathbf{F}^{(m)} \rangle = 0$).

Si on linéarise cette expression autour de f_0 , solution de l'équation de Vlasov sans fluctuations, il ne faut pas oublier que $U[f^{(n)}](\mathbf{r})$ inclue les fluctuations dans le champ moyen dû à la propagation des fluctuations en f , c'est-à-dire que, si $f = f_0 + \delta f$, alors

$$U[f](\mathbf{r}) = U_0 + U_1 \approx U_0 + \frac{\partial U}{\partial f} \delta f.$$

Si on introduit cette expression dans l'équation de Vlasov stochastique avec aussi l'expression pour les fluctuations en densité, on obtient l'équation linéarisée

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta U}{\partial \mathbf{r}} \equiv -\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \quad (3.8)$$

Puisque nous voulons que la dynamique brownienne à un corps reproduise l'évolution de Boltzmann-Langevin, nous supposons la force stochastique locale dans l'espace et dans le temps et invariante par rotation. Sa fonction de corrélation peut être donc écrite

$$\langle \delta \mathbf{F}(\mathbf{r}_1, t_1) \delta \mathbf{F}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 2\tilde{D}_0(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (3.9)$$

La dynamique est donc similaire à celle obtenue à partir de l'équation de Boltzmann - Langevin, mais le coefficient de diffusion est modifié

$$2\tilde{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) = 2\tilde{D}_0(\mathbf{r}_1) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_1} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_2} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (3.10)$$

La dépendance en impulsion du coefficient de diffusion ainsi obtenu (3.10) est différente de celle qui est associée au terme original de Boltzmann-Langevin. Donc a priori le remplacement (3.7) n'est pas capable de reproduire correctement la dynamique de tous les modes. Toutefois, il est possible d'ajuster la quantité \tilde{D}_0 de façon telle que les modes qui dominent la dynamique soient bien reproduits. On s'attend à ce que les modes les plus instables, qui conduisent à la fragmentation du système, soient aussi les plus importants pour l'évolution. Nous allons donc essayer d'ajuster \tilde{D}_0 pour reproduire l'évolution des modes les plus instables dans la région spinodale.

Nous avons vu au paragraphe 2.10.1 (équation 2.88) que la fonction de corrélation des modes collectifs correspondants à la même valeur de k est donnée par

$$\mathcal{D}_k^{\nu\nu'} = \frac{\langle Q_k^\nu | D | Q_k^{\nu'} \rangle}{\langle Q_k^\nu | f_k^\nu \rangle \langle f_k^{\nu'} | Q_k^{\nu'} \rangle}.$$

Nous demandons que les résultats de Boltzmann-Langevin (BL) pour les modes les plus rapides, pour une température et une densité données, soient bien reproduits par la dynamique brownienne à un corps (BOB) ², c'est-à-dire que nous imposons la condition

$$\tilde{\mathcal{D}}_k^{++} = \mathcal{D}_k^{++}(\rho, T). \quad (3.11)$$

Pour obtenir le terme de source \mathcal{D}_k^{++} , pour la théorie de Boltzmann-Langevin, il suffit de calculer la projection du coefficient de diffusion de Boltzmann-Langevin sur le mode instable

$$\mathcal{D}_k^{++} = \frac{\int \frac{d\mathbf{p}_1}{h^d/4} \frac{d\mathbf{p}_2}{h^d/4} [Q_k^+(\mathbf{p}_1)]^* D(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) Q_k^{+'}(\mathbf{p}_2)}{\int \frac{d\mathbf{p}_1}{h^d/4} [Q_k^+(\mathbf{p}_1)]^* f_k^+(\mathbf{p}_1) \int \frac{d\mathbf{p}_2}{h^d/4} Q_k^+(\mathbf{p}_2) [f_k^+(\mathbf{p}_1)]^*} \quad (3.12)$$

où d est la dimension, et

$$Q_k^+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} + \omega_k^+}.$$

D est le coefficient de diffusion qui, à limite de basse température, peut être écrit [Ran94]

$$D = w_0 \left[f_1 \bar{f}_1 \delta_{12} - \frac{1}{\rho \Phi_0} f_1 \bar{f}_1 (1 + d \cos \theta_1 \cos \theta_2) f_2 \bar{f}_2 \right]$$

avec $\Phi_0 = (d/2)(T/\varepsilon_F)$ et w_0 l'inverse du temps de relaxation de l'occupation moyenne.

Pour la dynamique brownienne à un corps il faut par contre calculer la même quantité dans laquelle le coefficient D est remplacé par le \tilde{D} défini avec la relation (3.10).

Si on résout les intégrales (où plutôt l'intégrale au numérateur, car pour les deux termes de bruit le dénominateur est le même) on obtient, dans le cas de l'évolution de BL

$$\mathcal{D}_k^{++} = \mathcal{C}_k w_0 \frac{mT}{\rho k^2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial \rho} \right)^{-2} \left\{ \frac{\rho k^2}{m \omega_k^2} \frac{\partial U_k}{\partial \rho} [1 + F_0(\mathbf{k})] - \frac{2k^2}{m} \frac{\varepsilon_F}{d \omega_k^2} [1 + F_0(\mathbf{k})]^2 - 1 \right\} \quad (3.13)$$

où \mathcal{C}_k représente le dénominateur de l'équation (3.12) et où

$$F_0(\mathbf{k}) = \frac{m \Omega_d}{h^d/4} (2\varepsilon_F m)^{\frac{d-2}{2}} \frac{\partial U_k}{\partial \rho}$$

avec $\Omega_d = \pi$ pour $d = 2$ et $\Omega_d = 2\pi$ pour $d = 3$.

²La dynamique BOB est la dynamique brownienne à un corps (Brownian One-Body).

3.3 Méthodes d'introduction du bruit

Dans le cas de l'évolution de type BOB

$$\tilde{\mathcal{D}}_k^{++} = c_k \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial \rho} \right)^{-2} \tilde{D}_0. \quad (3.14)$$

Donc pour que la relation (3.11) soit vérifiée il faut que

$$\tilde{D}_0 = w_0 \frac{mT}{\rho} \left\{ \frac{\rho k^2}{m\omega_k^2} \frac{\partial U_k}{\partial \rho} [1 + F_0(\mathbf{k})] - \frac{2k^2}{m} \frac{\varepsilon_F}{d\omega_k^2} [1 + F_0(\mathbf{k})]^2 - 1 \right\} \quad (3.15)$$

La quantité w_0 peut être facilement reliée au nombre de collisions par particule. En fait, à l'équilibre,

$$2D^{var} = \bar{f}W^+ + fW^- = 2fW^- = 2f\bar{f}w_0$$

est le nombre de collisions par unité de volume dans l'espace des phases; donc le nombre total de collisions par nucléon $\mathcal{N}(\mathbf{r})$ est

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\int d\varepsilon f \bar{f} w_0}{\int d\varepsilon f} = \frac{1}{2} \frac{T}{\varepsilon_F} w_0 \quad \text{à deux dimensions}$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\int d\varepsilon \varepsilon^{1/2} f \bar{f} w_0}{\int d\varepsilon \varepsilon^{1/2} f} \approx \frac{3}{4} \frac{T}{\varepsilon_F} w_0 \quad \text{à trois dimensions.}$$

De cette façon la force peut être déterminée dans chaque point \mathbf{r} tout au long de l'évolution dynamique. Dans la pratique, une fois que $\tilde{D}_0(\mathbf{r})$ a été calculé, les particules test qui sont proches du point \mathbf{r} vont sentir la force due au champ moyen, à laquelle va s'ajouter une petite force $\delta\mathbf{F}$ choisie au hasard dans une distribution gaussienne centrée à zéro et avec une variance donnée par $\sigma_F^2 = 2\tilde{D}_0/\Delta t \Delta V$, où Δt et ΔV sont le temps et le volume sur lesquels la force est appliquée.

Cette méthode ne conserve pas l'énergie et l'impulsion si aucune corrélation n'est imposée aux forces aléatoires. Cette petite violation de la conservation de l'énergie et de l'impulsion peut être facilement éliminée en introduisant une correction sur la force $\delta\mathbf{F}_i$ ressentie par les particules test. En pratique, une fois que les quantités $\delta\mathbf{F}_i$ ont été déterminés, on apporte une correction de la forme

$$\widetilde{\delta\mathbf{F}}_i = \delta\mathbf{F}_i + \alpha \mathbf{p}_i + \Delta\mathbf{F}$$

(\mathbf{p}_i étant l'impulsion de la i -ème particule test) de façon telle que l'énergie et l'impulsion sont conservées, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} \sum_i p_i^2 = \sum_i (\mathbf{p}_i + \widetilde{\delta\mathbf{F}}_i \Delta t)^2 \\ \sum_i \widetilde{\delta\mathbf{F}}_i \Delta t = 0. \end{cases}$$

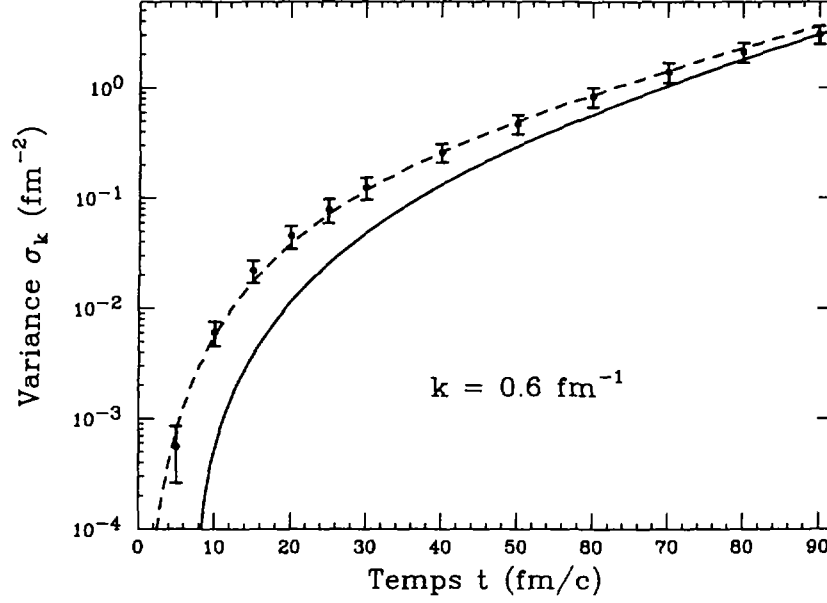


Figure 3.3: Test effectué sur la méthode BOB en considérant l'évolution de σ_k pour le mode le plus instable à ρ égal à la moitié de la densité normale et $T = 3 \text{ MeV}$ (point; les barres représentent l'erreur statistique lié au nombre fini d'événements) comparée avec la prédiction analytique de BL (ligne continue) et de BOB (ligne tiretée).

Nous avons testé cette méthode dans le cas d'un système à deux dimensions. Nous avons préparé le système à la moitié de sa densité de saturation et avec une température de 3 MeV , qui est dans la région d'instabilité spinodale. Le mode le plus instable pour ce système correspond au nombre d'onde $k \approx 0.6 \text{ fm}^{-1}$. Nous avons simulé 25 événements qui employaient chacun 1500 particules test par nucléon et nous avons étudié la croissance de la variance σ_k associée au mode le plus instable. L'utilisation de 1500 particules test par nucléon introduit encore un petit bruit (autour du 5 %) qui a été pris en compte dans la détermination de σ_k . La figure (3.3) montre les résultats obtenus (points) confrontés avec la prédiction analytique obtenue dans le cadre de la réponse linéaire pour l'évolution de BL (ligne continue) et pour l'évolution de BOB (ligne tiretée). Dans les deux prédictions analytiques, le temps d'instabilité obtenu à partir de la simulation a été considéré. Il apparaît clairement que l'évolution de la simulation converge vers la courbe prédite par la théorie de Boltzmann-Langevin et que la prédiction analytique décrit bien les résultats de la simulation. De plus les évolutions des modes proches du plus instable sont reproduites avec un aussi bon accord. Nous pouvons conclure que la méthode BOB est capable de bien

3.3 Méthodes d'introduction du bruit

reproduire la dynamique de Boltzmann-Langevin.

La possibilité d'agir localement dans l'espace de phases pour introduire le bruit en fonction des valeurs locales de la densité et de la température ainsi que la relative facilité pour mettre en œuvre la méthode et les temps de calcul limités sont les avantages de la dynamique brownienne à un corps. L'utilisation de cette méthode est donc souhaitable surtout quand on est intéressé à suivre l'évolution dynamique de la collision toute entière. Par contre, quand on étudie l'évolution d'un système qui se trouve déjà dans la région d'instabilité la méthode est équivalente à celle dans laquelle le bruit est introduit que dans les conditions initiales, comme la méthode SIM. N'ayant mis au point cette méthode que dernièrement, la grande partie des résultats présentés ci après utilise les méthodes TNT et SIM.

Chapitre 4

Les études théoriques des approches stochastiques

Les approches stochastiques de champ moyen sont potentiellement capables de bien décrire des systèmes dans lesquels des fluctuations même importantes sont présentes. Elles peuvent faire des prédictions sur les caractéristiques des fragments produits et sur les temps concernés, dans l'hypothèse d'une décomposition spinodale. Cependant, avant de pouvoir les utiliser pour l'étude de la multifragmentation, il est nécessaire de poser des questions importantes afin de clarifier des points essentiels:

- ♥ Quel est le pouvoir prédictif des approches stochastiques dans le cas de la décomposition spinodale. En fait, c'est la première fois que des telles approches sont appliquées à l'étude de la multifragmentation. Il faut donc vérifier les résultats d'une approche stochastique dans un cas de transition de phase pour lequel on connaît aussi la solution exacte [Jac96a].
 - ◇ Quel rôle joue l'expansion du système dans la décomposition spinodale. En effet, pour pouvoir atteindre la région spinodale, les systèmes nucléaires doivent être en expansion et il est donc essentiel de voir quelle est l'influence sur les modes instables et sur les temps d'instabilité de cette expansion [Col95a].
 - ♣ Quel est l'effet de considérer des noyaux, à savoir des systèmes caractérisés par un nombre fini de constituants. A partir de quelle taille peut-on parler de décomposition spinodale et quel est le rôle joué par la surface [Col96a].
 - ♠ Quel est le rôle du chaos dans les processus que l'on veut étudier. Nous savons que les équations de champ moyen sont des équations non-linéaires. Dans des situations de ce type le chaos peut devenir un facteur dominant
-

4.1 Approches stochastiques et instabilités spinodales

de la dynamique et il est essentiel de comprendre son rôle éventuel [Jac95, Jac96b].

Dans ce chapitre, nous essayerons de donner des réponses à toutes ces questions.

4.1 Approches stochastiques et instabilités spinodales

Les approches stochastiques ont déjà été testées avec succès dans plusieurs situations impliquant des petites corrélations. Donc il n'est pas évident qu'elles soient valides dans le cas des transitions de phase du premier ordre où les corrélations à plusieurs corps deviennent très importantes. Comme il est impossible de vérifier la validité de l'approche dans un cadre quantique, pour lequel aucune théorie est encore capable de tenir compte de toutes les corrélations, nous l'avons fait dans le cas de particules classiques. En fait, dans ce cas là, il est possible de simuler le problème exact à plusieurs corps. De plus, ce type de calcul permet d'envisager une problématique générale qui n'est pas liée strictement à la physique nucléaire et qui est la validité des approches de champ moyen stochastiques dans la description des transitions de phase du premier ordre.

Pour pouvoir simuler un système infini, en réduisant les efforts de calcul, nous avons considéré un gaz de van der Waals dans une grande boîte bidimensionnelle avec des conditions aux limites périodiques¹. Les particules du gaz interagissent par le moyen d'une force avec un cœur dur de rayon $r_c = 0.55 \text{ fm}$ et une composante attractive à longue portée. Cette interaction est montrée dans l'insert de la figure (4.1). Une fois l'interaction définie, nous pouvons simuler l'évolution d'un gaz, simplement en résolvant les équations classiques de Hamilton. La propagation pour la partie à longue portée est obtenue en utilisant la méthode standard du "saut de mouton" [Ber88], tandis que l'évolution due au cœur dur est traitée avec un algorithme de collisions de sphères dures [Jac96a]. De cette manière le code obtenu est très rapide et précis. C'est ce souhait qui nous a fait choisir la forme du potentiel montrée sur la figure (4.1). La température du système peut être maintenue constante au moyen d'un bain thermique obtenu avec un gaz auxiliaire de particules.

Tout d'abord, il est important d'extraire le diagramme de phase du système classique considéré, qui va être notre référence pour la comparaison avec les calculs stochastiques de champ moyen. Dans ce but, nous avons étudié le comportement de la pression, calculé avec le théorème du viriel [Rei65], en fonction de la densité

¹Du point de vue théorique s'être limité à deux dimensions ne réduit pas la portée des conclusions, car il est connu que plus les dimensions sont grandes plus le champ moyen est valide.

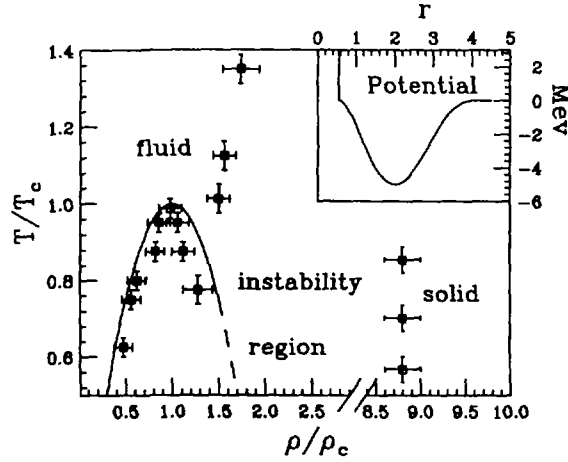


Figure 4.1: Le diagramme de phase associé à l'interaction utilisée (montrée dans l'insert): les carrés montrent la limite de la région d'instabilité observée dans l'"expérience numérique". La courbe montre les limites de la région spinodale prédites par la théorie de champ moyen.

du gaz. De cette façon, on est arrivé à extraire les bords de la région d'instabilité comme ils sont montrés sur la figure (4.1). Pour le système considéré le point critique a été situé à $T_c = 40 \text{ MeV}$ et $\rho_c = 0.5 \text{ fm}^{-2}$, mais il faut remarquer que ces valeurs n'ont pas une signification absolue parce que, par exemple, la valeur de T_c peut être facilement renormalisée simplement en ajustant convenablement la profondeur de la partie attractive du potentiel, et celle de ρ_c en changeant les échelles de longueur. D'ailleurs ce changement ne modifie pas la dynamique, à part un changement trivial dans les échelles des temps et des longueurs. C'est pour cela qu'allons introduire des températures et des densités réduites (T/T_c et ρ/ρ_c).

Nous avons donc simulé la dynamique du système plongé dans la région spinodale: en particulier, nous avons initialisé le système à la densité critique et avec une température $T/T_c = 0.3$. Une partie d'un événement, parmi ceux que nous avons générés, est montrée sur la figure (4.2). On voit que le système forme rapidement des fragments mais que aucun petit fragment n'est obtenu et qu'au contraire tous les fragments ont des tailles similaires. Cela est confirmé par une analyse de Fourier des fluctuations de la densité, c'est-à-dire en calculant la fonction de corrélation C_k^2 (qui est la fonction de corrélation habituelle σ_k normalisée à la valeur initiale). Cette fonction présente un pic qui reflète la présence d'une échelle favorisée autour de $\lambda = 2\pi/k \approx 10 \text{ fm}$.

Nous allons maintenant considérer ces simulations comme une expérience

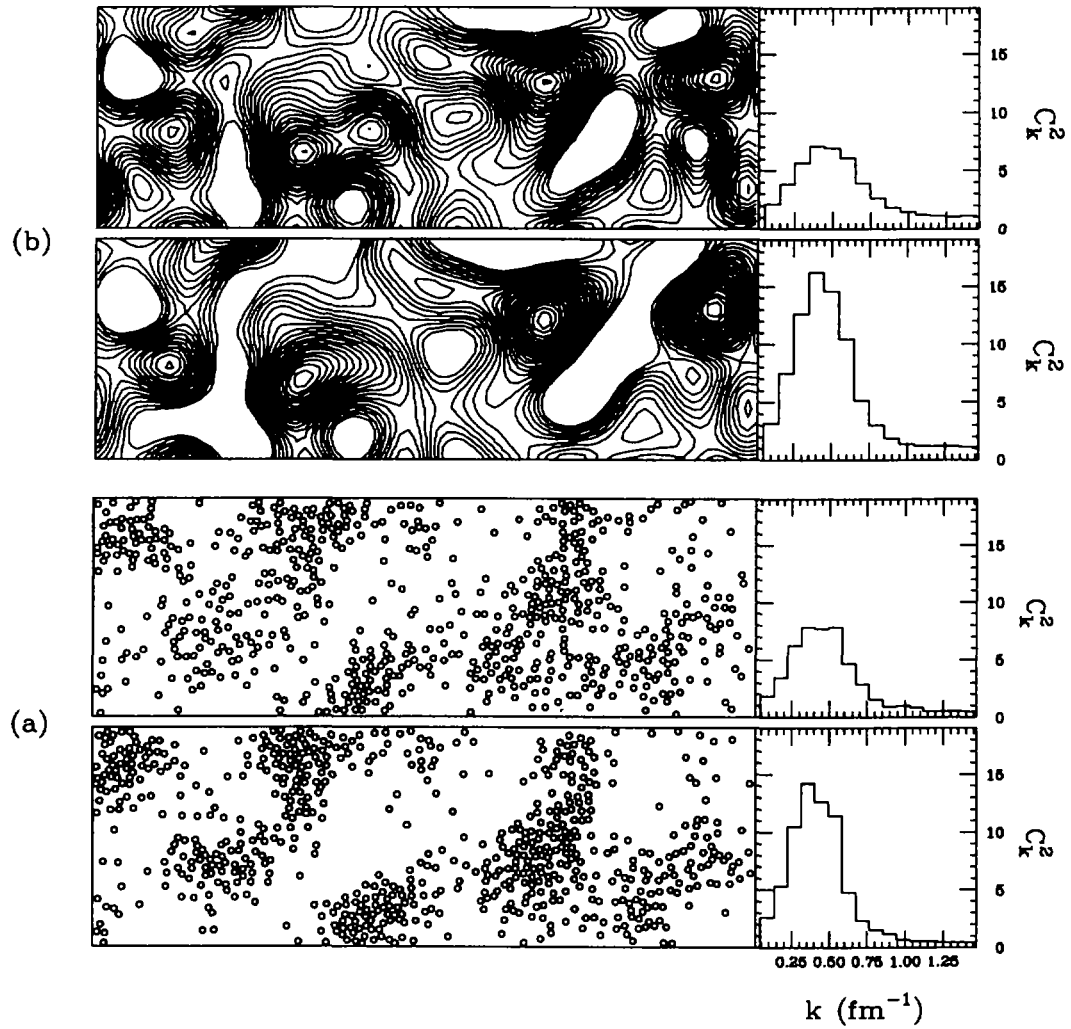


Figure 4.2: A gauche, la distribution des particules pour un calcul exact (a) et de la densité pour une simulation de champ moyen stochastique de la décomposition spinodale à deux dimensions. Les temps montrés sont 40 et 60 fm/c. Dans la réalité les simulations dans les deux cas sont effectuées sur des boîtes trois fois plus grandes. A droite la fonction de corrélation C_k^2 dans l'espace de Fourier, calculé sur plusieurs événements.

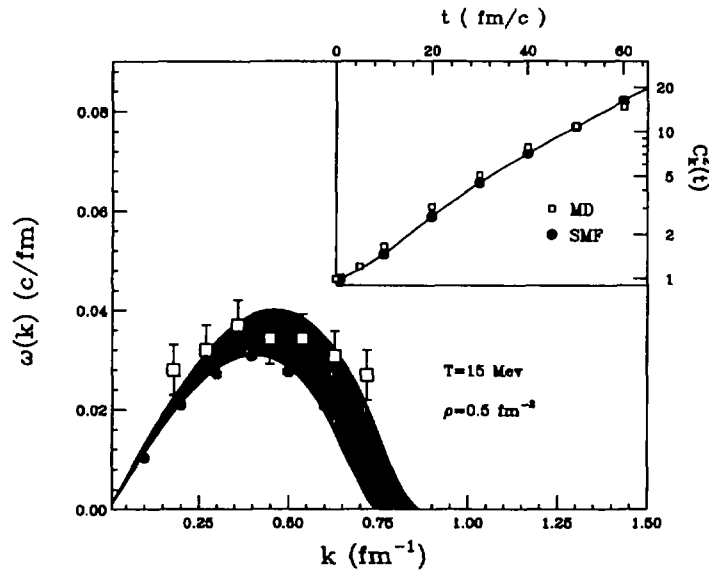


Figure 4.3: Les relations de dispersion obtenues pour les différentes simulations (carrés: calcul exact; cercles: simulations de champ moyen stochastique), comparées avec les prédictions de la réponse linéaire (région grisée qui tient compte de l'indétermination dans la paramétrisation du champ moyen). Dans l'insert l'évolution de $C_k^2(t)$ pour le mode le plus instable, renormalisée à la valeur initiale $C_k^2(0)$, calculé pour le calcul exact et pour la simulation de champ moyen stochastique.

numérique avec laquelle nous pouvons comparer les résultats de l'approche de champ moyen stochastique. Ces résultats sont obtenus en résolvant l'équation de Boltzmann-Langevin pour un gaz classique, c'est-à-dire en étudiant l'évolution de la fonction densité à un corps, décrite par l'équation de Vlasov, complétée par un terme de collision de Boltzmann et dans laquelle les fluctuations sont introduites dans les conditions initiales avec la méthode SIM (cf. §3.3.1). Nous avons utilisé un potentiel de Skyrme dans lequel les paramètres A , B et σ sont ajustés de façon d'avoir la même densité critique et la même température critique que dans le cas classique exact. On pourra donc calculer facilement la pression et déterminer la région spinodale à partir de la condition $\partial P / \partial \rho|_T = 0$. Le bord de la région spinodale obtenue dans l'approximation de champ moyen est aussi montré sur la figure (4.1).

Pour tenir compte des propriétés de surface, très importantes quand on veut étudier des processus de formation de fragments, nous avons convolué notre potentiel local avec une gaussienne dont la variance a été choisie de façon d'avoir la même énergie de surface que dans le calcul exact. De cette façon une portée a

4.1 Approches stochastiques et instabilités spinodales

été introduite dans l'interaction effective.

Nous pouvons tout d'abord étudier le régime des petites fluctuations que nous pouvons comparer à la réponse linéaire du champ moyen. La relation de dispersion obtenue analytiquement est montrée sur la figure (4.3). Elle présente un maximum à $k = 0.5 fm^{-1}$ qui est relié à la portée introduite dans le champ moyen. La relation de dispersion peut être aussi extraite numériquement dans le cas des simulations de champ moyen et des simulations exactes en étudiant la propagation d'une petite perturbation sinusoïdale dans la densité de particules. Les résultats sont aussi montrés sur la figure (4.3). Il est possible de voir que, comme on s'attendait, les simulations de champ moyen suivent les prédictions de la réponse linéaire. Mais le résultat le plus intéressant est que la simulation exacte suit, elle aussi, les prédictions de l'approximation linéaire de champ moyen. En outre, on peut observer que le maximum de la relation de dispersion correspond à la longueur favorisée dans la fonction de corrélation de la dynamique exacte.

Si on regarde maintenant un événement simulé de la décomposition spinodale du système dans l'approche de champ moyen stochastique (figure (4.2)), on voit qu'il présente une ressemblance qualitative avec celui prédit avec la dynamique exacte. La comparaison de deux événements pris au hasard ne suffit pas; il faut aussi comparer l'ensemble des événements. Mais en fait cette ressemblance est encore plus évidente au niveau d'un ensemble de trajectoires, par exemple si on compare les fonctions de corrélation C_k^2 (voir la figure (4.2)). On voit que l'évolution est la même dans les deux cas et que la forme et le pic sont bien reproduits. Si on regarde l'évolution de la fonction de corrélation pour le mode le plus instable (qui est le même dans les deux cas) dans la simulation exacte et dans la simulation de champ moyen stochastique (insert de la figure (4.3)) on observe un très bon accord entre l'amplification exponentielle des fluctuations dans l'approche de champ moyen stochastique et le résultat de la simulation exacte.

Donc nous avons vu que, pour un gaz de Van der Waals dans la région spinodale, le processus "exact" de formation de fragments suit les modes collectives les plus instables prédites par la réponse linéaire au champ moyen; mais aussi que ce même processus peut être simulé à travers des approches de champ moyen stochastique, qui peuvent donc être considérées comme des bons outils pour étudier des transitions de phase du premier ordre.

Étudions maintenant les propriétés des instabilités spinodales dans différents cas. En particulier dans les prochains paragraphes nous considérerons les effets de l'expansion, de la taille fini, de la répulsion coulombienne. Commençons d'abord par la prise en compte de l'expansion.

4.2 Instabilités spinodales et expansion

4.2.1 Cas unidimensionnel

Considérons d'abord un système schématique associé à une seule coordonnée: un point sur un cercle de rayon $R(t)$ en expansion. Dans ce cas, nous pouvons introduire, comme variables, l'angle de la particule sur le cercle et le moment angulaire associé à son mouvement

$$J = m R^2(t) \dot{\theta} \equiv \mathcal{I}(t) \dot{\theta}. \quad (4.1)$$

Si nous supposons que la force qui retient la particule sur le cercle est radiale et que toutes les autres forces F sont tangentielle au cercle, l'évolution de J est donnée par $\dot{J} = FR(t)$. Si la force dérive d'un potentiel $FR(t) = -\partial U/\partial \theta$, alors, la dynamique du système peut être associée avec le hamiltonien

$$H = \frac{J^2}{2\mathcal{I}(t)} + U(\theta, t). \quad (4.2)$$

Si maintenant nous considérons un gaz de particules indépendantes qui bougent sur le cercle sous l'effet du champ U , leur densité dans l'espace des phases suivra l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f(\theta, J, t)}{\partial t} = \frac{\partial U(\theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial f(\theta, J, t)}{\partial J} - \frac{J}{\mathcal{I}(t)} \frac{\partial f(\theta, J, t)}{\partial \theta}. \quad (4.3)$$

Introduisons les coordonnées curvilignes des particules sur le cercle: $s = R(t)\theta$ et $p = m\dot{s}$ qui sont liées aux variables angulaires par

$$\theta = s/R(t) \quad (4.4)$$

$$J = [p - A(s, t)]R(t) \quad (4.5)$$

où $A(s, t) = m\dot{R}(t)s/R(t)$ est l'impulsion collective dans la coordonnée s associé avec l'expansion. Avec ces nouvelles coordonnées le hamiltonien devient

$$H = \frac{[p - A(s, t)]^2}{2m} + U(s, t). \quad (4.6)$$

Il faut observer que les conditions aux limites, qui correspondent à $\theta = \pm\pi$, sont associées avec les coordonnées $s = \pm\pi R(t)$ qui s'éloignent avec une vitesse $v_s = \pm\pi\dot{R}(t)$. Ces conditions périodiques correspondent dans la représentation des variables angulaires à

$$f(\pi, J) = f(-\pi, J) \quad (4.7)$$

tandis que dans la représentation des coordonnées curvilignes à

$$f(\pi R(t), p + m\pi\dot{R}(t)) = f(-\pi R(t), p - m\pi\dot{R}(t)). \quad (4.8)$$

4.2 Instabilités spinodales et expansion

4.2.2 Généralisation à toute dimension

Le formalisme que l'on vient de présenter peut être généralisé à toute dimension simplement en associant à chaque coordonnée s_i et p_i , qui se dilate avec une vitesse $\dot{R}_i(t)$, les variables généralisées réduites Q_i et P_i qui sont les analogues des variables angulaires introduites dans le modèle simple considéré précédemment et qui sont données par

$$Q_i = s_i / R_i(t) \quad (4.9)$$

$$P_i = [p_i - A_i(s_i, t)] R_i(t) \quad (4.10)$$

où A_i est définie comme l'impulsion due à l'expansion collective $A_i(s_i, t) = m \dot{R}_i(t) s_i / R_i(t)$. Dans ce cas, le hamiltonien peut être écrit comme

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2\mathcal{I}_i(t)} + U(\mathbf{Q}, t) \quad (4.11)$$

où les paramètres d'inertie $\mathcal{I}_i(t)$ sont donnés par $\mathcal{I}_i(t) = m R_i^2(t)$. En termes des coordonnées s_i et p_i le hamiltonien devient

$$H = \sum_i \frac{[p_i - A_i(s_i, t)]^2}{2m} + U(\mathbf{s}, t) \quad (4.12)$$

Et si on considère un gaz de particules, on peut écrire l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t} = \frac{\partial U(\mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\mathbf{P}}{\mathcal{I}(t)} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{Q}} \quad (4.13)$$

Il est intéressant d'observer que dans le cas d'une expansion uniforme cette équation peut être reliée à l'équation de Vlasov usuelle pour la densité dans l'espace (\mathbf{s}, \mathbf{p}) :

$$\frac{\partial f(\mathbf{s}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial U(\mathbf{s}, t)}{\partial \mathbf{s}} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{s}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{s}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{s}} \quad (4.14)$$

Pour ce qui concerne les conditions périodiques, elles sont données par

$$f(\dots, Q_i = \pi, \dots; \mathbf{P}) = f(\dots, Q_i = -\pi, \dots; \mathbf{P}) \quad (4.15)$$

dans l'espace des variables réduites et par

$$f(\dots, s_i = \pi R_i(t), \dots; \dots, p_i + m\pi \dot{R}_i(t), \dots) = f(\dots, s_i = -\pi R_i(t), \dots; \dots, p_i - m\pi \dot{R}_i(t), \dots) \quad (4.16)$$

dans l'espace des coordonnées curvilignes.

Si nous avons un champ moyen, qui dépend de la densité dans l'espace \mathbf{s} , celle-ci sera donnée par

$$\rho(\mathbf{s}) = \varrho(\mathbf{Q}) / R^d(t) \quad (4.17)$$

où la densité en \mathbf{Q} est définie par

$$\varrho(\mathbf{Q}) = \int \frac{d\mathbf{P}}{h^d/g} f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) . \quad (4.18)$$

Ici d est la dimension de l'espace considéré et g introduit un éventuel facteur de dégénérescence spin-isospin. Si le champ moyen est créé par une force avec une portée constante σ_s dans la coordonnée s , il aura, dans les variables réduites Q , une portée qui dépend du temps

$$\sigma_Q = \sigma_s/R(t). \quad (4.19)$$

Puisque la dynamique dans les coordonnées Q et P correspond à l'équation de Vlasov, il est facile de montrer que la distribution de Fermi-Dirac

$$f^{(0)}(P) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(P^2/2\mathcal{I}(0) - \mu)]} \quad (4.20)$$

est une solution stationnaire. Toutefois, comme le paramètre d'inertie \mathcal{I} est non constant dans le temps, il est possible d'écrire la densité à un temps t

$$f^{(0)}(P, t) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(t)(P^2/2\mathcal{I}(t) - \mu(t))]} \quad (4.21)$$

où nous avons introduit une température dépendante du temps ($\beta(t) = 1/T(t)$):

$$T(t) = \frac{T(0)}{\alpha^2(t)} \quad (4.22)$$

et un potentiel chimique lui aussi dépendant du temps

$$\mu(t) = \frac{\mu(0)}{\alpha^2(t)}. \quad (4.23)$$

Dans ces équations, nous avons introduit le facteur de dilatation $\alpha(t) = R(t)/R(0)$. En utilisant ces variables la densité peut être aussi exprimée dans l'espace s et \mathbf{p}

$$f^{(0)}(s, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(t)(|\mathbf{p} - \mathbf{A}|^2/2m - \mu(t))]} . \quad (4.24)$$

Cette expression peut être facilement comprise, car elle correspond à une distribution de Fermi déplacée de l'impulsion locale d'expansion \mathbf{A} . Donc une expansion positive ($\dot{R} \geq 0$) réduit la température du système.

4.2 Instabilités spinodales et expansion

4.2.3 Réponse linéaire

Si maintenant nous développons f autour de la solution uniforme $f^{(0)}$, nous obtenons l'équation RPA pour les petites déviations $f^{(1)}$:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \frac{\mathbf{P}}{\mathcal{I}} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{\partial U[\varrho(\mathbf{Q})](t)}{\partial \varrho(\mathbf{Q})} \frac{\partial \varrho^{(1)}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} = 0 \quad (4.25)$$

où nous avons introduit de façon explicite la densité $\varrho(\mathbf{Q})$. Puisque f est périodique, il est possible de calculer la transformée de Fourier dans la variable \mathbf{Q}

$$f_{\mathbf{K}}^{(1)}(\mathbf{P}, t) = \int \frac{d\mathbf{Q}}{2\pi} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}} f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \quad (4.26)$$

Donc l'équation RPA devient

$$-i \frac{\partial f_{\mathbf{K}}^{(1)}(\mathbf{P}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\mathcal{I}(t)} f_{\mathbf{K}}^{(1)}(\mathbf{P}, t) - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\mathcal{I}(t)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon(t)} \frac{\partial U_{\mathbf{K}}(t)}{\partial \varrho} \varrho_{\mathbf{K}}^{(1)}(t) = 0, \quad (4.27)$$

où l'énergie $\varepsilon(t) = P^2/2\mathcal{I}(t)$ a été introduite. L'équation RPA est donc équivalente à

$$i \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{K}, \mathbf{P}, t)}{\partial t} = \int \frac{d\mathbf{P}'}{h^d/g} \mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{K}', \mathbf{P}', t) f^{(1)}(\mathbf{K}', \mathbf{P}', t), \quad (4.28)$$

où la matrice \mathcal{M} est diagonale en \mathbf{K} et est égale à

$$\mathcal{M}(\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{K}', \mathbf{P}', t) = \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \left(\delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \frac{h^d \mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{g \mathcal{I}(t)} - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\mathcal{I}(t)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon(t)} \frac{\partial U_{\mathbf{K}}(t)}{\partial \varrho} \right). \quad (4.29)$$

Cette quantité dépend du temps, car l'inertie, le potentiel, la température et le potentiel chimique dépendent du temps. Il est toutefois possible de remarquer qu'à un temps donné il correspond à la matrice de la relation de dispersion statique pour le système dilaté. Donc les fréquences propres instantanées ne sont pas affectées par l'expansion. Cependant, pour pouvoir étudier des propriétés du système telles que la stabilité, il faut suivre la propagation de $f^{(1)}$ sur un temps t fini. Cette propagation est régie par l'équation

$$f_{\mathbf{K}}^{(1)}(t) = T \left(\exp(-i \int_0^t dt' \mathcal{M}(t')) \right) f_{\mathbf{K}}^{(1)}(0) \equiv \mathcal{K}_{\mathbf{K}}(t) f_{\mathbf{K}}^{(1)}(0) \quad (4.30)$$

où T est l'opérateur d'ordre temporel et la matrice $\mathcal{K}_{\mathbf{K}}$, qui permet de calculer $f_{\mathbf{K}}^{(1)}(t)$ à partir de $f_{\mathbf{K}}^{(1)}(0)$, est appelée matrice de monodromie.

La solution de l'équation (4.30) donne l'évolution temporelle de la perturbation $f_{\mathbf{K}}^{(1)}$. Cette évolution peut être étudiée en introduisant les états propres et les fonctions propres de la matrice de monodromie

$$f_{\mathbf{K},\nu}^{(1)}(t) = \mathcal{K}_{\mathbf{K}}(t) f_{\mathbf{K},\nu}^{(1)}(0) = \exp(i\omega_{\mathbf{K},\nu}(t) t) f_{\mathbf{K},\nu}^{(1)}(0). \quad (4.31)$$

Dans le cas d'un système statique, puisque la matrice \mathcal{M} ne dépend pas du temps, les solutions de l'équation (4.31) sont les états propres de la matrice RPA et les fréquences propres ω_K sont obtenues à partir de la relation de dispersion associée

$$1 = \int \frac{d\mathbf{P}}{h^d/g} \frac{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial U_{\mathbf{K}}}{\partial \varrho} \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\mathcal{I}}}{\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\mathcal{I}} + \omega_{K,\nu}}. \quad (4.32)$$

Dans le cas d'un système en expansion, par contre, en appliquant la transformation de Magnus [Mag56], il est possible de réécrire l'équation (4.30) de la façon suivante

$$f_K^{(1)}(t) = \exp \left(-i \int_0^t dt' \mathcal{M}(t') + \mathcal{S}(t) \right) f_K^{(1)}(0) \quad (4.33)$$

où \mathcal{S} est une somme d'intégrales qui dépendent des commutateurs $[\mathcal{M}(t'), \mathcal{M}(t'')]$, c'est-à-dire des commutateurs de la matrice RPA prise à deux temps différents. Pour des vitesses d'expansion relativement petites (ou pour des intervalles de temps courts) il est possible de considérer juste le premier terme de l'expression (4.33) et de négliger le terme \mathcal{S} .

A partir de cette approximation on peut exprimer la dépendance en temps de $f_K^{(1)}(t)$ comme dans l'équation (4.31), où maintenant $\omega_K(t)$ est donné par la solution de l'équation

$$1 = \int \frac{d\mathbf{P}}{h^d/g} \frac{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon(t)} \frac{\partial U_{\mathbf{K}}(t)}{\partial \varrho} \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\bar{\mathcal{I}}(t)}}{\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\bar{\mathcal{I}}(t)} + \omega_K(t)}. \quad (4.34)$$

où on a introduit le paramètre d'inertie moyenné dans le temps

$$\bar{\mathcal{I}}^{-1}(t) = \int_0^t \frac{dt'}{t} \mathcal{I}^{-1}(t') \quad (4.35)$$

et le potentiel moyenné sur le temps

$$\bar{U}_{\mathbf{K}}(t) = \frac{\bar{\mathcal{I}}(t)}{\mathcal{I}(t)} \int_0^t \frac{dt'}{t} U_{\mathbf{K}}(t'). \quad (4.36)$$

Il est aussi possible d'introduire un paramètre de Landau renormalisé

$$\bar{F}_0^K(t) = -\frac{\partial \bar{U}_{\mathbf{K}}(t)}{\partial \varrho} \int \frac{d\mathbf{P}}{h^d/g} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon(t)} \quad (4.37)$$

et une fonction de réponse renormalisée

$$\bar{\xi}(\omega_K, t) = \int \frac{d\mathbf{P}}{h^d/g} \frac{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon(t)} \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\bar{\mathcal{I}}(t)}}{\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}}{\bar{\mathcal{I}}(t)} + \omega_K} \left(\int \frac{d\mathbf{P}}{h^d/g} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon(t)} \right)^{-1}. \quad (4.38)$$

De cette façon, la relation de dispersion peut être réécrite dans la forme standard

$$\bar{\xi}(\omega_K(t), t) = -\frac{1}{\bar{F}_0^K(t)} \quad (4.39)$$

4.2 Instabilités spinodales et expansion

Cette analyse nous montre que, pendant un intervalle de temps petit, pour lequel l'approximation faite est valide, le système suit la phénoménologie connue et donc montre des instabilités pour $\bar{F}_0^K(t) \leq -1$.

Pour les longueurs d'onde petites, nous savons (cf. §2.10) que la portée de la force associée avec le potentiel U introduit une coupure pour les modes instables. La façon plus simple de prendre en compte ces effets est de considérer le développement de la transformée de Fourier du potentiel en puissance de K et de considérer les termes d'ordre plus bas

$$U_K(t) = U(t)(1 - K^2 \sigma_Q^2(t)/2), \quad (4.40)$$

où σ_Q est liée à la portée de l'interaction dans la variable Q qui change dans le temps avec $\alpha(t)$ (voir l'équation (4.19)). Dans ce cas \bar{U} devient

$$\bar{U}_K(t) = \bar{U}(t)(1 - K^2 \bar{\sigma}_Q^2(t)/2) \quad (4.41)$$

où la portée renormalisée est donnée par

$$\bar{\sigma}_Q^2(t) = \sigma_Q^2(t) \frac{\int_0^t dt' U(t') \frac{\alpha^2(t)}{\alpha^2(t')}}{\int_0^t dt' U(t')}. \quad (4.42)$$

Si on considère les termes du premier ordre en $\beta = \alpha - 1$, on obtient

$$\bar{\sigma}_Q^2(t) \approx \sigma_Q^2(t) \alpha(t). \quad (4.43)$$

La portée de l'interaction associée dans la variable s donc évolue selon la même relation

$$\bar{\sigma}_s^2(t) \approx \sigma_s^2(t) \alpha(t). \quad (4.44)$$

Il est donc clair que, au fur et à mesure que le coefficient de dilatation augmente, la portée σ_Q augmente aussi. Cela signifie que l'expansion simule une force avec une portée plus grande. Cela peut être compris en considérant que les particules, qui sont trop distantes pour interagir, étaient initialement plus proches et donc pouvaient bien être en interaction. Donc la mémoire de cette interaction passée augmente la portée effective, comme le décrit bien la relation (4.44).

Toutefois, il faut remarquer que, au fur et à mesure que le système se dilate, il devient toujours plus dilué (la densité évolue comme α^{-d}). Donc, il existe un intervalle de temps maximal au delà duquel les considérations faites ne sont plus valides, soit parce que le système est sorti de la région spinodale, soit parce que la densité est devenue si basse que le processus de formation de fragment est devenu plutôt similaire à la nucléation. Cette valeur de la densité peut être estimée autour de 1/10 de la densité de saturation en imposant que le nombre de particules incluses dans des fluctuations typiques de la densité, associées aux

longueurs d'onde les plus instables, ne soit trop petit (supérieur à 10). Cela donne une limite supérieure au coefficient de dilatation: $\alpha^d \approx 5$.

Le temps que le système passe dans la région spinodale est relié à l'inverse de la vitesse d'expansion $t \approx 1/\dot{\alpha}$. Donc le système se cassera selon les modes instable du champ moyen si ce temps est suffisamment long pour permettre une bonne amplification des fluctuations, c'est-à-dire quand $1/\dot{\alpha} > \tau_K$, qui conduit à la relation:

$$\dot{\alpha} < 1/\tau_K, \quad (4.45)$$

où τ_K est le temps caractéristique responsable de la croissance des fluctuations dans des systèmes instables. Ce temps se situe autour de $50 \text{ fm}/c$ et donc pour des noyaux la relation (4.45) correspond à des vitesses maximales autour de $0.2 - 0.4 \text{ c}$ selon la taille du système et selon la valeur initiale des fluctuations. Pour des vitesses plus grandes le système va être directement "vaporisé".

Considérons maintenant quel est l'effet de l'expansion sur les modes les plus instables et sur leurs temps d'instabilité en faisant une comparaison avec les résultats qu'on connaît dans le cas d'un système à deux dimensions sans expansion. Nous avons vu que pour un tel système les instabilités sont amplifiées ou amorties avec un temps caractéristique obtenu à partir de la relation de dispersion

$$\frac{1}{\tau_k} = k \left(\frac{\epsilon}{\rho} + \frac{\partial U_k}{\partial \rho} \right) \left[-\frac{m}{\rho} \left(\frac{\epsilon}{2\rho} + \frac{\partial U_k}{\partial \rho} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

Cette relation de dispersion a un maximum qui correspond à des longueurs d'onde $\lambda \approx 8 - 10 \text{ fm}$, quand le système se trouve bien dedans la région spinodale, et à des temps d'instabilités associées autour de $40 \text{ fm}/c$.

Quand nous considérons un système avec une vitesse d'expansion $\dot{\alpha}$ (petite), nous obtenons encore deux solutions imaginaires pour ω_k . Les temps d'instabilité associés sont obtenus à partir de la relation de dispersion (qui dépend du temps)

$$\frac{1}{\tau_k(t)} = k \left(\frac{\epsilon(t)}{\rho(t)} + \frac{\partial \bar{U}_k(t)}{\partial \rho(t)} \right) \left[-\frac{\bar{m}}{\rho(t)} \left(\frac{\epsilon(t)}{2\rho(t)} + \frac{\partial \bar{U}_k(t)}{\partial \rho(t)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.47)$$

où nous avons introduit le paramètre d'inertie moyenné sur le temps

$$\bar{m}^{-1}(t) = m^{-1} \int_0^t \frac{dt'}{t} \frac{\alpha^2(t)}{\alpha^2(t')} \approx m^{-1} \alpha \quad (4.48)$$

et le potentiel dépendant du temps

$$\bar{U}(t) \approx A(\rho(t)/\rho_0)(2\alpha - 1) + B(\rho(t)/\rho_0)^2(3\alpha - 2) \quad (4.49)$$

Ce potentiel est associé à une portée renormalisée, comme nous l'avons définie dans l'équation (4.44).

4.2 Instabilités spinodales et expansion

L'équation (4.47) représente une correction par rapport au temps d'instabilité calculé pour la matière nucléaire dans le cas statique. Quand la vitesse d'expansion n'est pas grande ($\dot{\alpha} < 0.02 c/fm$), les fluctuations auront le temps de se développer et donc on pourra conclure que, dans ces cas, la dynamique est encore dominée par la croissance exponentielle des modes les plus instables. De plus, dans ces cas, la correction due à l'équation (4.47) n'est pas importante et donc les modes qui dominent la dynamique et le temps d'instabilité associés restent essentiellement les mêmes que dans le cas statique. Donc les longueurs d'onde plus importantes seront encore autour de $\lambda = 8 - 10 fm$ et les temps d'instabilité autour de $30 - 60 fm/c$.

4.2.4 Simulations à 2D d'un système en expansion

Pour mieux illustrer ce qu'on vient d'obtenir, nous avons étudié un gaz de fermions dans une boîte périodique à deux dimensions en expansion. La méthode utilisée pour la résolution de l'équation d'évolution de f est la méthode des particules test déjà introduite. Le champ moyen a été calculé en utilisant une paramétrisation de Skyrme convoluée avec une gaussienne pour tenir compte des effets de surface et de certains effets quantiques. Pour rendre l'analyse du processus de fragmentation plus facile à comprendre, dans les simulations, le système s'étend juste dans la direction x et le champ moyen est moyenné le long de la direction y .

Nous avons pris en compte explicitement les conditions aux limites périodiques en expansion: en particulier, à chaque pas en temps, nous regardons les particules qui traversent les limites (qui dépendent du temps) de la boîte et, au moment du franchissement nous les déplaçons de l'autre côté de la boîte et nous inversons leur vitesse d'expansion collective. De plus, pour le traitement de l'intégrale des collisions, nous avons considéré les collisions dans le référentiel local en expansion, c'est-à-dire, nous avons soustrait la vitesse d'expansion.

Nous avons donc considéré le système bidimensionnel que l'on vient d'introduire à la température de $3 MeV$ et pour des valeurs différentes de la vitesse d'expansion: $\dot{\alpha} = 0.003 c/fm$, $\dot{\alpha} = 0.006 c/fm$ et $\dot{\alpha} = 0.012 c/fm$. Nous avons effectué des simulations en considérant des valeurs différentes de la densité initiale toutes dans la région spinodale, et nous avons regardé la réponse du système à l'introduction de petites fluctuations dans la densité.

Sur la figure (4.4) nous montrons les temps d'instabilité en fonction des différentes valeurs initiales de la densité (ligne épaisse) calculé, pour le mode le plus instable, pour une vitesse d'expansion $\dot{\alpha} = 0.003 c/fm$ et sur un intervalle de temps de $50 fm/c$. La même quantité est représentée en fonction de la densité finale (ligne fine). On peut voir que les valeurs obtenues sont similaires à celles que l'on obtient dans le cas d'un système qui ne s'étend pas (ligne tiretée). Cela est une confirmation du fait que l'expansion, à basse vitesse, n'affecte pas

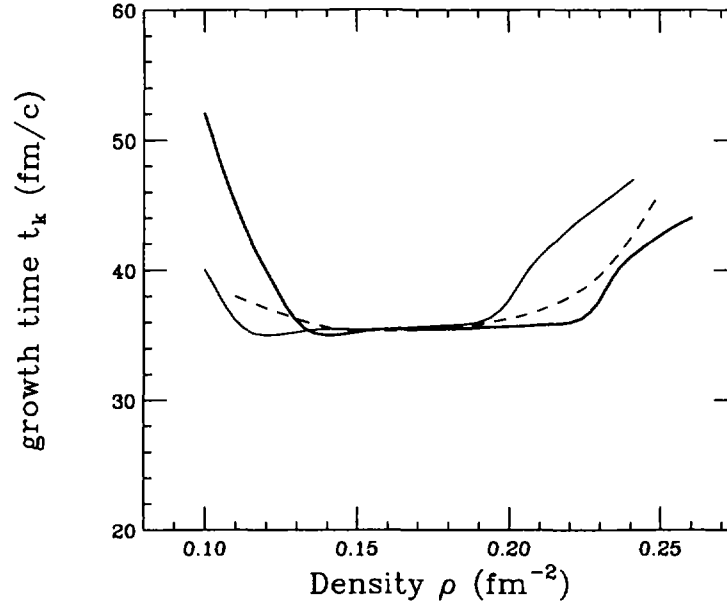


Figure 4.4: Le temps caractéristique de la croissance exponentielle du mode le plus instable (trait épais), calculé après $50 \text{ fm}/c$, pour un système à deux dimensions en expansion, en fonction de la densité initiale dans la région d'instabilité spinodale. La température du système est $T = 3 \text{ MeV}$ et la vitesse d'expansion $\alpha \approx 0.003c/\text{fm}$. Les mêmes temps sont montrés aussi en fonction de la densité atteinte après $50 \text{ fm}/c$ (trait fin). La courbe tiretée représente les résultats obtenus pour un morceau de matière nucléaire sans expansion.

les propriétés des instabilités dynamiques.

Une étude intéressante concerne la façon avec laquelle le système se casse à la suite du développement des instabilités. Pour avoir des résultats fiables, il faut tenir compte de manière correcte des fluctuations introduites par la dynamique. Pour faire cela nous avons utilisé dans ce cas la méthode TNT présentée au paragraphe 3.3.1. La figure (4.5) présente l'évolution dynamique d'un système en expansion préparé dans la région spinodale (à $\rho = \rho_0/2$, $T = 3 \text{ MeV}$), pour 4 valeurs différentes de la vitesse d'expansion.

Les simulations montrent clairement que les fluctuations sont amplifiées par le système et causent la formation de "fragments". Au fur et à mesure que la vitesse d'expansion augmente, la fragmentation se passe plus rapidement. Ce résultat est consistant avec l'estimation faite pour les temps d'instabilité obtenus avec l'équation (4.47). Nous avons d'ailleurs prédit que le maximum de la relation de dispersion autour de $\lambda \approx 8 - 10 \text{ fm}$ est presque indépendant de la vitesse d'expansion; en effet, il est possible de voir grossièrement sur la figure (4.5) que

4.2 Instabilités spinodales et expansion

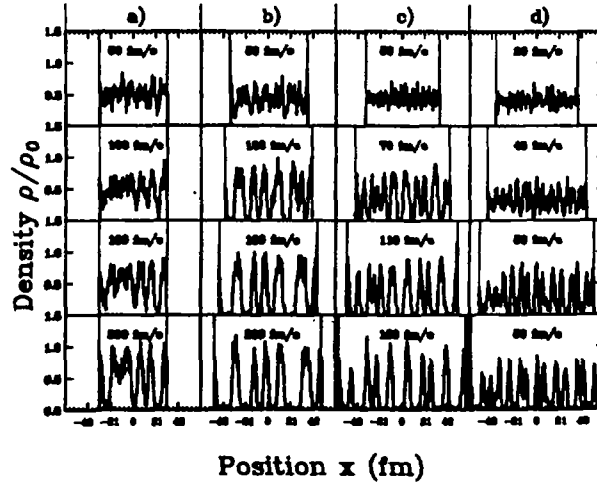


Figure 4.5: Evolution de la distribution de densité pour un morceau de matière nucléaire infinie en expansion, à moitié de la densité de saturation et à la température de 3 MeV . Quatre différentes valeurs de la vitesse d'expansion ont été considérées ($\dot{\alpha} \approx 0., 0.003, 0.006, 0.012 \text{ c/fm}$). Plus de fragments sont formés dans les systèmes avec les vitesses d'expansion plus grandes, car la fragmentation se passe dans un système plus étendu tandis que la longueur d'onde typique reste la même.

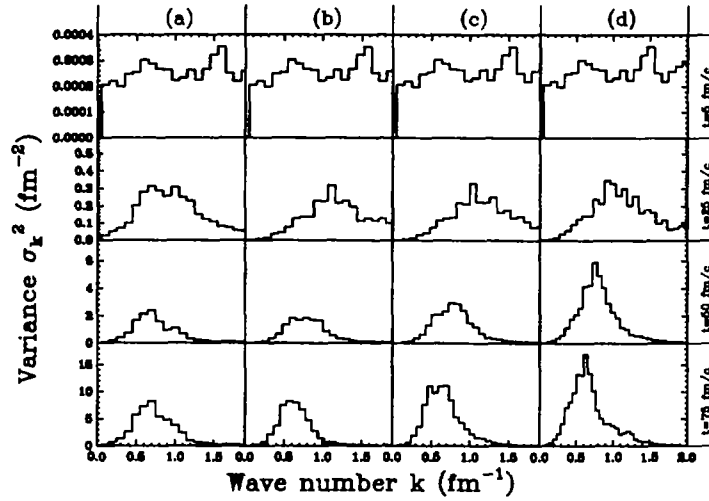


Figure 4.6: La variance σ_k^2 en fonction du nombre d'onde k , à différents temps, pour les systèmes présentés sur la figure (4.5).

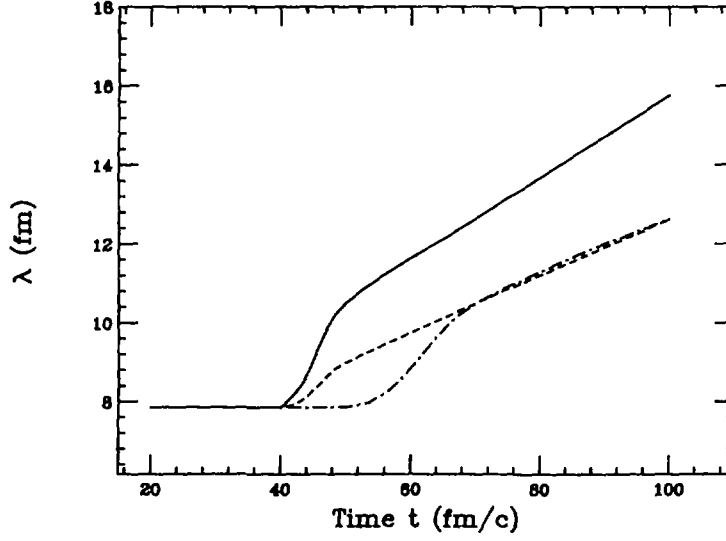


Figure 4.7: Evolution temporelle de la longueur d'onde λ la plus importante, dans le cas des vitesses d'expansion $\dot{\alpha} \approx 0.003 \text{ c/fm}$ (ligne en point-tiret), $\dot{\alpha} \approx 0.006 \text{ c/fm}$ (ligne en tiret), $\dot{\alpha} \approx 0.012 \text{ c/fm}$ (ligne continue).

la longueur d'onde est la même dans les différents cas.

Pour étudier ce phénomène de façon plus quantitative, il est possible de considérer la transformée de Fourier de la densité

$$\rho(k, t) = \int_0^{L_x} dx e^{-ikx} \delta\rho(x, t), \quad (4.50)$$

où $\delta\rho(x) = \bar{\rho}(x) - \rho(0)$ représente la partie fluctuante de la densité et L_x est la taille du système dans la direction x . De plus, pour une étude quantitative il faut considérer un ensemble d'événements et introduire la quantité moyennée sur l'ensemble

$$\sigma_k^2(t) = \langle |\rho(k, t)|^2 \rangle = \int \int dx dx' e^{-ik(x-x')} \langle \delta\rho(x, t) \delta\rho(x', t) \rangle. \quad (4.51)$$

qui est rien d'autre que le Fourier de la fonction de corrélation spatiale $\sigma(x - x') = \langle \delta\rho(x, t) \delta\rho(x', t) \rangle$.

La figure (4.6) montre la fonction de corrélation σ_k^2 aux différents temps pour les différentes vitesses d'expansion considérées. Sur cette figure, il est possible de voir que pour tous les systèmes la fonction de corrélation est piquée à la même position. Cet effet est plus clair dans la figure (4.7) qui montre la longueur d'onde, associée avec le maximum du Fourier, en fonction du temps. Jusqu'au

4.2 Instabilités spinodales et expansion

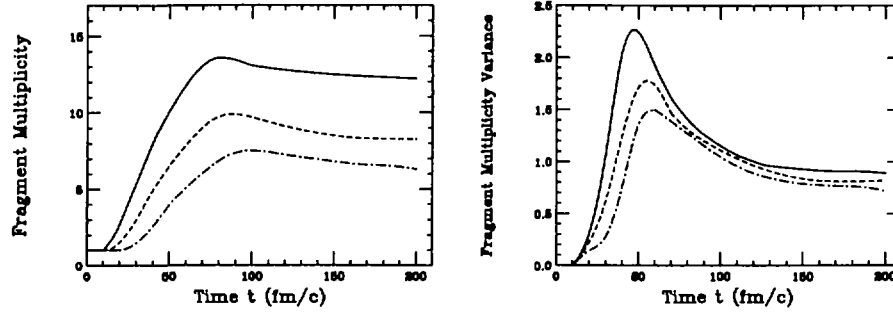


Figure 4.8: Evolutions de la multiplicité moyenne de fragments (à gauche) et de la variance (à droite) obtenues pour le système instable considéré pour les vitesses d'expansion $\alpha \approx 0.003$ c/fm (ligne en point-tiret), $\alpha \approx 0.006$ c/fm (ligne en tiret), $\alpha \approx 0.012$ c/fm (ligne continue).

moment où les fragments sont bien formés, la longueur d'onde qui domine le Fourier est $\lambda \approx 8 - 10$ fm. Après cette phase d'amplification des fluctuations, des fragments sont formés et s'éloignent les uns des autres tant que le système s'étend. Ce phénomène introduit une croissance linéaire de la longueur d'onde, qui est proportionnelle à la distance moyenne entre fragments. Cette croissance est visible dans la figure (4.7). Entre la phase de formation des fragments, à longueur d'onde constante, et le comportement linéaire asymptotique, la longueur d'onde, dans le cas de la vitesse plus faible considérée, présente une augmentation rapide due essentiellement à des phénomènes de coalescence dans la voie de sortie.

Un des avantages des systèmes que nous sommes en train de considérer est que l'expansion introduit clairement un temps au delà duquel les fragments sont définis de façon univoque. (On verra cela plus en détail dans la suite.) La figure (4.8) (partie gauche) montre la multiplicité moyenne de fragments en fonction du temps. Il est évident que, pour les systèmes en expansion plus rapide, les fragments sont formés plus vite et la partition du système est figée de façon plus précoce. Cela peut être vu aussi dans la partie droite de la même figure qui montre les fluctuations de la multiplicité de fragments. Il apparaît aussi clairement que les vitesses d'expansion les plus hautes sont associées à des plus grandes multiplicités. Ce résultat est en accord avec la prédominance d'une longueur d'onde pour toutes les vitesses d'expansion considérées. Il s'en suit que le nombre de fragments est simplement donné par la taille du système, au moment de la fragmentation, divisé par la longueur d'onde typique. Simultanément, les fluctuations de la multiplicité semblent être réduites par l'expansion. En fait, une fois les fragments formés, la multiplicité est bien définie et les fluctuations décroissent, car l'interaction entre fragments décroît.

4.3 Instabilités spinodales et systèmes finis

Considérer le cas de la matière nucléaire infinie est plutôt limitatif, car expérimentalement on peut étudier seulement quelques centaines de nucléons au maximum. De plus, on a à faire à des forces à longue portée comme la répulsion coulombienne et à des systèmes qui pendant leur fragmentation sont en expansion. Pour une étude approfondie il faut tenir compte des effets liés à ces caractéristiques.

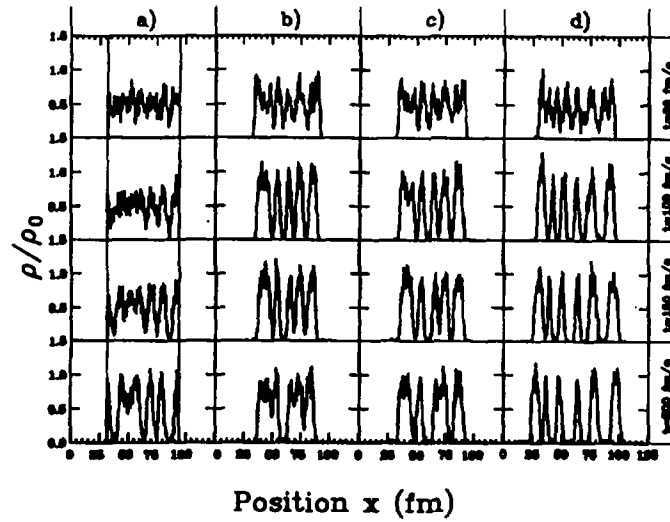


Figure 4.9: Exemples typiques de fragmentation de la matière nucléaire à deux dimensions pour: une boîte périodique (a), un morceau de matière fini (sans conditions périodiques) (b), incluant la répulsion coulombienne (c) et en expansion (d).

Dans ce paragraphe nous ferons cette étude sur un système “modèle” à deux dimensions. Des systèmes réalistes seront considérés au chapitre prochain.

Considérons d’abord les effets liés à la taille finie du système. Nous avons donc étudié la dynamique d’un morceau de matière nucléaire fini (i.e. sans conditions périodiques). Nous avons d’abord observé (voir figure (4.9b)) que l’évolution est encore caractérisée par la présence d’instabilité de volume. En fait, à cause de ces instabilités, le système se casse en 5-6 fragments qui correspondent au développement d’oscillations avec une longueur d’onde autour de $\lambda = 10 \text{ fm}$. Mais la présence de la surface introduit une rupture explicite de la symétrie par translation qui déclenche la rupture du système en fragments. Nous pouvons observer qu’après 150 fm/c la partition initiale du système est fortement modifiée à cause de la présence de l’interaction entre les fragments. Cet effet peut être

4.3 Instabilités spinodales et systèmes finis

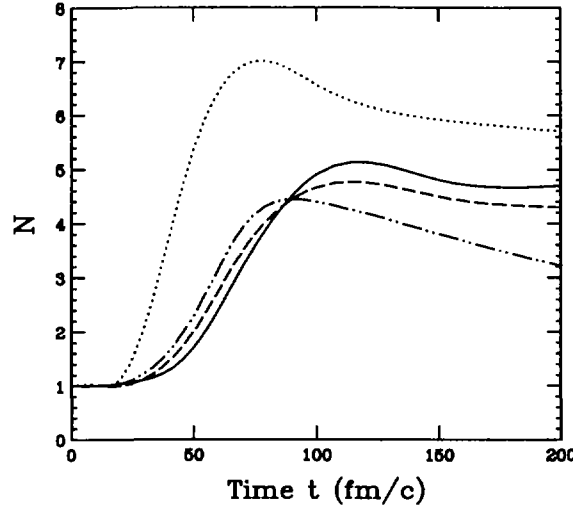


Figure 4.10: Nombre moyen de fragments en fonction du temps pour la boîte périodique (ligne en tiret), le morceau de matière sans conditions périodiques (ligne en trait-point), chargé (ligne continue) et en expansion (ligne en pointillé).

mieux observé dans la multiplicité moyenne présentée sur la figure (4.10). Les recombinaisons sont donc accélérées par la présence de la surface, les fragments du bord étant attirés par ceux du centre. Toutefois il faut remarquer que le manque de petits fragments persiste, car, dans la simulation, seulement des phénomènes de fusion sont observés.

Ce phénomène de fusion sera réduit par la présence de forces répulsives. Il est donc important de considérer l'effet de la répulsion coulombienne. Nous avons ajouté dans les calculs l'interaction coulombienne. Comme l'on voit sur les figures (4.9c) et (4.10), cette interaction réduit la recombinaison finale des fragments. En fait, il est facile de montrer que le temps qu'il faut pour qu'un fragment de taille M s'éloigne d'une distance $d = 1 \text{ fm}$ est donné de façon grossière par

$$\tau_{\text{coul}} = \sqrt{MRd/V_c} \approx 10 - 30 \text{ fm}/c$$

où R est la distance du centre de la charge et V_c le potentiel coulombien. Donc l'effet de l'interaction coulombienne est de réduire le temps nécessaire au système pour figer sa répartition en fragments et en conséquence d'augmenter les possibilités de garder la mémoire des instabilités dynamiques.

Le même effet est obtenu en introduisant dans la dynamique l'expansion du système, comme on a déjà vu au paragraphe précédent, et comme on peut le voir, dans le cas d'un système ouvert, sur la figure (4.9d). En effet la vitesse collective éloigne les fragments les uns des autres et, par conséquent, ils arrêtent d'être en interaction très rapidement. Cet effet est clair sur la figure (4.10) où

on voit que le système se casse assez rapidement en fragments et que la mémoire des instabilités initiales, entre autre la multiplicité, est gardée dans la partition finale.

Pour comparaison, dans les deux figures (4.9a) et (4.10) nous avons présenté de nouveau les résultats obtenus pour un système infini. C'est là le bon moment pour faire une remarque importante. Dans le cas de géométries fermées, le système doit relaxer vers l'équilibre statistique. Cette tendance peut être observée dans les simulations numériques du système fermé pendant les derniers 100 fm/c (voir les figures). Comme nous le verrons (cf. §4.4), cette relaxation vers l'équilibre est essentiellement liée à l'interaction résiduelle parmi les domaines à grande densité qui détermine des effets aléatoires de coalescence et qui peut conduire à des comportements chaotiques. Pour les forces qu'il faut considérer dans le cas nucléaire, les temps concernés avant que ces effets se produisent sont assez longs. Ces temps peuvent être estimés grossièrement en calculant le temps nécessaire pour que le système échantillonne statistiquement toutes les partitions possibles. Il est relié au temps dont un fragment a besoin pour subir une réaction nucléaire. Dans le cas idéalisé que nous sommes en train de considérer il peut être estimé par la relation

$$\tau_{echan} = d_{moy}/v_f$$

où d_{moy} est la distance moyenne entre la surface des fragments (donc dans notre cas autour de 5 fm) et v_f est la vitesse du fragment. Cette vitesse peut être estimée à partir du théorème d'équipartition ce qui nous donne: $v_c \approx 0.01 c$. Donc le temps d'échantillonnage est très long, de l'ordre de plusieurs centaines de fm/c, en accord avec notre simulation numérique, mais aussi avec les temps obtenus pour l'apparition du chaos (voir dans la suite le paragraphe 4.4). Ce temps est à comparer avec les temps liés à la répulsion coulombienne et au processus d'expansion; il est évident alors que, ces derniers étant beaucoup plus courts que les premiers, les interactions entre les fragments n'arrivent pas à modifier de façon importante les partitions initiales et que le système se partitionne suivant les instabilités spinodales initiales.

4.4 Instabilités spinodales et chaos

Il est connu d'un point de vue mathématique que l'apparition du chaos est liée à la présence de non-linéarités dans l'équation d'évolution [Tab89, Ott93]. Les équations de champ moyen, comme l'équation de Vlasov, contenant un potentiel auto-consistent, sont des équations non linéaire et sont donc des bons candidats pour générer des évolutions chaotiques. D'ailleurs, la présence d'un régime chaotique dans des processus comme la multifragmentation a été évoqué des nombreuses fois pour expliquer le relatif succès des modèles statistiques [Gro92, Koo87, Bon85].

4.4 Instabilités spinodales et chaos

Récemment de différents travaux ont été rapportés dans la littérature [Bur94b, Bal95], décrivant une apparition très précoce du chaos dans la dynamique des systèmes instables, telle que la prédit une approche de type champ moyen. Ces résultats semblaient très différents des nôtres, dans lesquels la phase linéaire était suffisamment longue pour donner lieu à la formation des fragments selon les modes les plus instables prédits par la réponse linéaire.

Pour mieux comprendre ce point nous avons étudié l'évolution de Vlasov d'un morceau de matière nucléaire infinie. Pour cela nous avons utilisé (comme d'ailleurs les auteurs des références [Bur94b, Bal95]) la méthode de résolution sur réseau de l'équation de Vlasov, brièvement introduite au paragraphe 3.1. Pour rendre plus simple l'analyse le champ moyen est moyenné le long de la direction y . Les paramètres du champ moyen sont ceux indiqués au paragraphe cité auparavant, sauf que pour la variance de la gaussienne, avec laquelle on convolve le potentiel pour introduire une portée finie, nous avons utilisé deux valeurs, $a = 0.26 fm$ et $a = 0.93 fm$, dans le but d'étudier le rôle de ce paramètre. Dans la suite, on utilisera C (courte portée) pour se référer à la première valeur et L (longue portée) pour la deuxième. Toutefois, il faut remarquer que, dès que l'on veut étudier un système nucléaire, comme nous avons déjà vu (cf. §2.10), c'est la deuxième valeur de la variance qui donne une relation de dispersion proche de celle attendue pour la matière nucléaire [Ayi95].

Sur la figure (4.11) les relations de dispersion obtenues numériquement pour les deux interactions sont confrontées avec les prédictions analytiques de la réponse linéaire. On voit que les résultats numériques sont très proches des prédictions analytiques. Pour l'interaction L la longueur d'onde la plus instable est autour de $\lambda_i \approx 10 fm$ et le temps d'instabilité associé est autour de $\tau_i \approx 40 fm/c$, tandis que pour l'interaction C ces échelles sont divisées par trois: $\lambda_i \approx 3 fm$ et $\tau_i \approx 12 fm/c$. Cela est relié trivialement au fait que la portée de l'interaction C est trois fois plus petite que la portée de l'interaction L. Dans le but d'étudier la sensibilité aux conditions initiales de la dynamique des modes propres, nous avons calculé l'évolution d'une onde plane pour deux valeurs légèrement différentes de la densité initiale, pour les deux interactions (figure (4.12)), qui est la méthode préconisée dans la référence [Bur94b] pour signer la présence du chaos. Il apparaît clairement sur la figure que la dynamique des modes propres est presque insensible à la différence dans la densité initiale, contrairement à ce qui avait été rapporté dans la référence [Bur94b]. En effet nous avons montré [Jac95] que la sensibilité aux conditions initiales observée dans la référence [Bur94b] était due à une erreur de Fortran dans le code utilisé pour l'initialisation du système.

L'insensibilité aux conditions initiales, pour l'initialisation considérée, est encore plus clair si on regarde à l'évolution de la transformée de Fourier

$$\sigma_k(t) = \left| \int dx e^{ikx} \rho(x, t) \right|^2$$

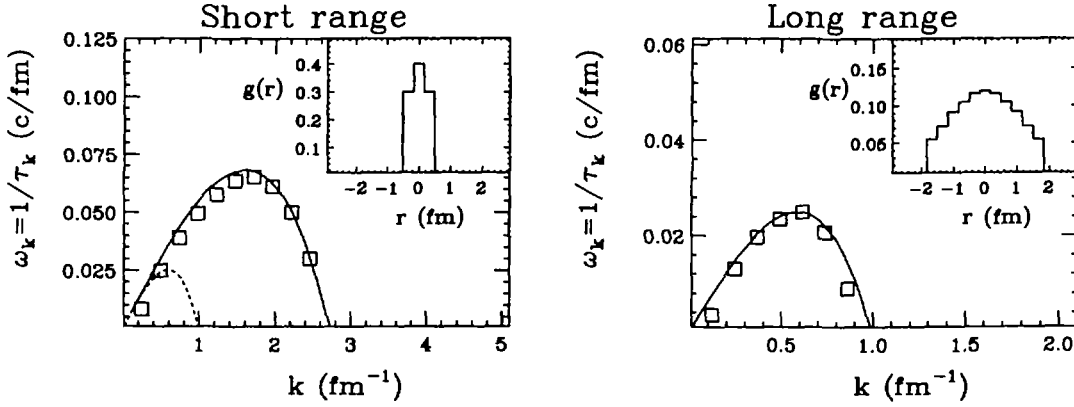


Figure 4.11: Gauche: la relation de dispersion obtenue à $\rho = \rho_0/2$ et $T = 3 \text{ MeV}$, dans le cas de l'interaction C. La courbe continue représente la prédiction analytique de la réponse linéaire, les points les valeurs obtenues d'après la simulation de Vlasov sur réseau [Cho91, Bur91]. Dans l'insert est représenté la fonction avec laquelle on convolue le potentiel. Droite: la même représentation qu'à gauche, mais pour l'interaction L (qui est plus réaliste dans le cas nucléaire). Pour comparaison la relation de dispersion pour la force L est montrée en tireté sur la figure de gauche.

de la densité (figure (4.13)). On peut bien voir que la fluctuation initiale reste dominante et que, seulement après plusieurs temps d'instabilité, le système commence à montrer des phénomènes de doublement de fréquence. Toutefois cela n'est pas encore lié à la présence du chaos, mais plutôt est une indication du fait que le système est seulement sur le chemin vers le chaos.

L'étude de la propagation des modes propres n'est pas suffisante si on veut caractériser complètement la dynamique du système. En conséquence, nous avons étudié un ensemble d'événements dans lesquels les fluctuations de densité sont déterminées aléatoirement autour d'une densité moyenne égale à $0.4 \rho_0$. Si on regarde deux systèmes différents initialisés de cette façon (figure (4.14)), ils semblent évoluer très différemment. On pourrait donc penser que cette rapide amplification des petites différences initiales puisse être une indication d'un régime chaotique. Toutefois, on peut remarquer (figure (4.15)) que le même comportement est observé dans un calcul dans lequel les fluctuations introduites initialement sont amplifiées indépendamment pour chaque mode. Ce fait est une indication que la dynamique est en réalité, au moins jusqu'au temps considéré, régulière.

Il a été proposé [Bur94b, Bal95] de chercher la signature de la présence du chaos grâce à l'étude des exposants de Lyapunov. Cette méthode donne une condition nécessaire pour la caractérisation du chaos [Tab89, Ott93]. Elle a déjà

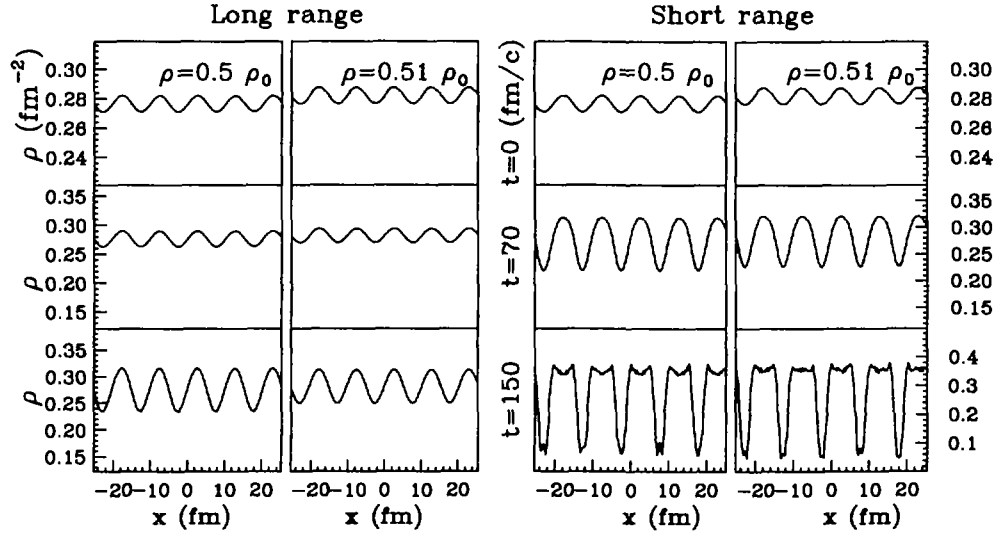


Figure 4.12: Evolutions dynamiques d'un mode propre de nombre d'onde $k = 0.6 \text{ fm}^{-1}$ obtenues pour les deux interactions et pour deux densités initiales légèrement différentes.

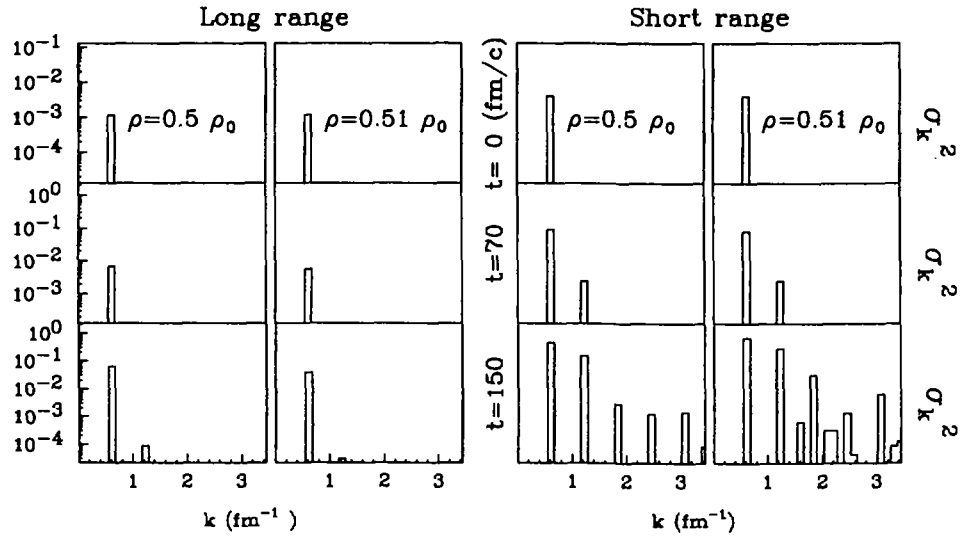


Figure 4.13: La même chose que pour la figure (4.12), mais dans l'espace k .

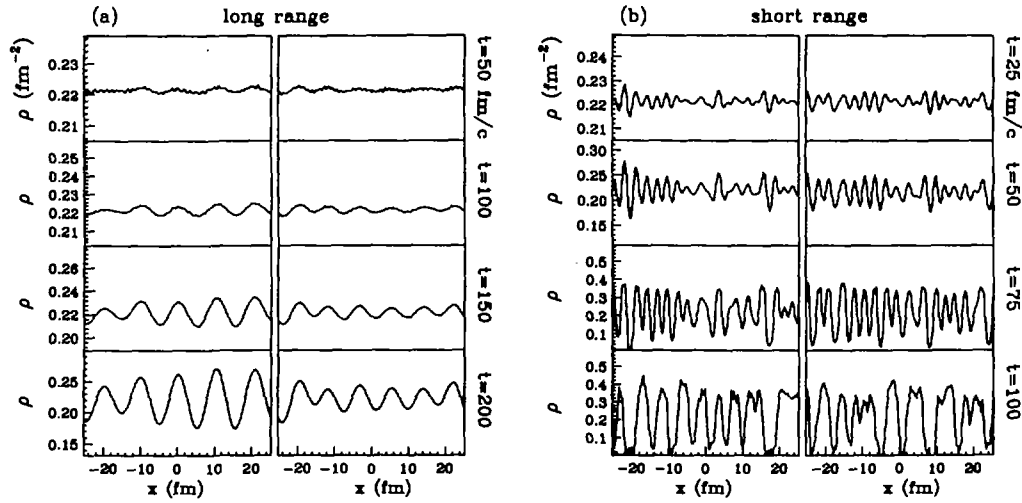


Figure 4.14: Deux évolutions dynamiques d'un système initialisé aléatoirement (avec une densité moyenne égale à $0.4 \rho_0$) pour l'interaction L (a) et pour l'interaction C (b).

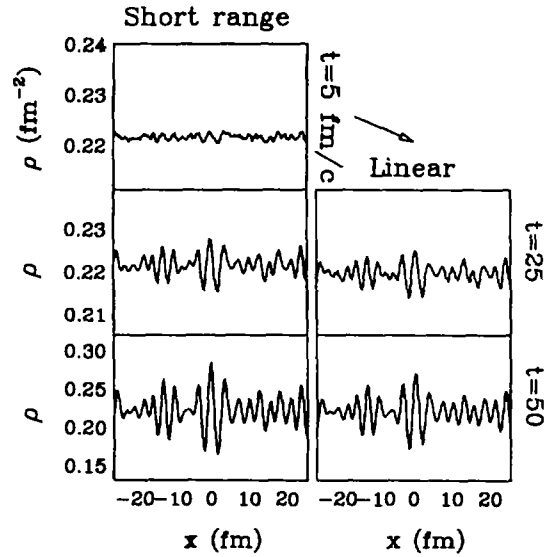


Figure 4.15: La dynamique de champ moyen complète d'un système initialisé aléatoirement (à gauche) comparée avec l'évolution complètement linéaire (à droite) obtenue en considérant des oscillateurs instables découplés, pour l'interaction C.

4.4 Instabilités spinodales et chaos

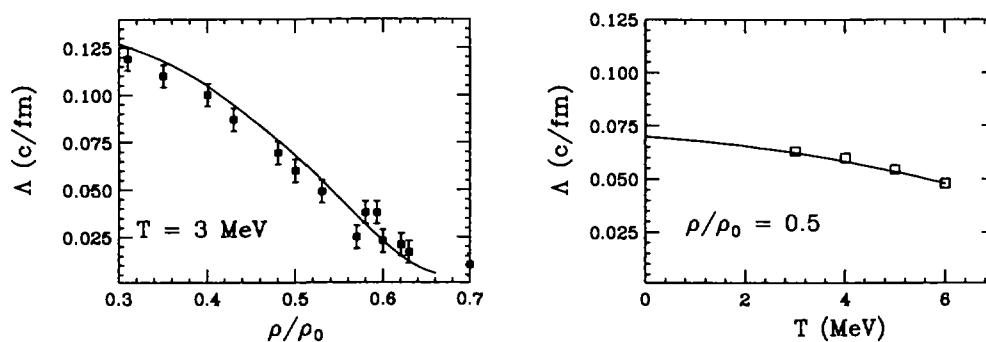


Figure 4.16: Les exposants de Lyapunov (définis dans le texte) en fonction de la température (à droite) et de la densité (à gauche), comparés aux fréquences imaginaires de la réponse linéaire, dans le cas de l'interaction C.

été utilisé pour mettre en évidence un comportement chaotique dans d'autres domaines de la physique nucléaire [Bal93].

L'exposant de Lyapunov donne une mesure de la divergence de deux trajectoires et il est défini comme

$$\Lambda(t) = \frac{\ln[d(t)/d(0)]}{t}$$

où $d(t)$ est la distance entre les deux trajectoires, qu'il faut définir de façon judicieuse. Les auteurs des références [Bur94b, Bal95], qui ont fait des calculs tout à fait analogues à ceux que l'on vient de montrer, l'ont défini comme le module de la différence des densités $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ dans l'espace \mathbf{r} :

$$d(t) = \sum_c |\rho^{(1)}(x_c, t) - \rho^{(2)}(x_c, t)| / N_c$$

où N_c est le nombre de cellules le long de la direction x . La distance initiale $d(0)$ est choisie très petite. En pratique dans les références [Bur94b, Bal95] les trajectoires considérées sont les mêmes de celles que l'on a montrées sur la figure (4.12), au-dessus desquelles des fluctuations de haute fréquence ont été ajoutées. Nous avons comparé sur la figure (4.16) les exposants ainsi obtenus avec les prédictions de la réponse linéaire pour les fréquences des modes les plus instables (voir la figure (4.11)). Il est évident que la théorie de la réponse linéaire est capable de bien reproduire et la dépendance en température et la dépendance en densité des coefficients de Lyapunov. Et en effet, puisque, comme nous avons montré, toute la première partie de la dynamique de la décomposition spinodale est dominée par la croissance exponentielle des modes les plus instables, il est facile de voir que les exposants de Lyapunov doivent être égaux à la fréquence la plus instable [Jac96b]. Donc les exposants de Lyapunov *ne peuvent pas* être

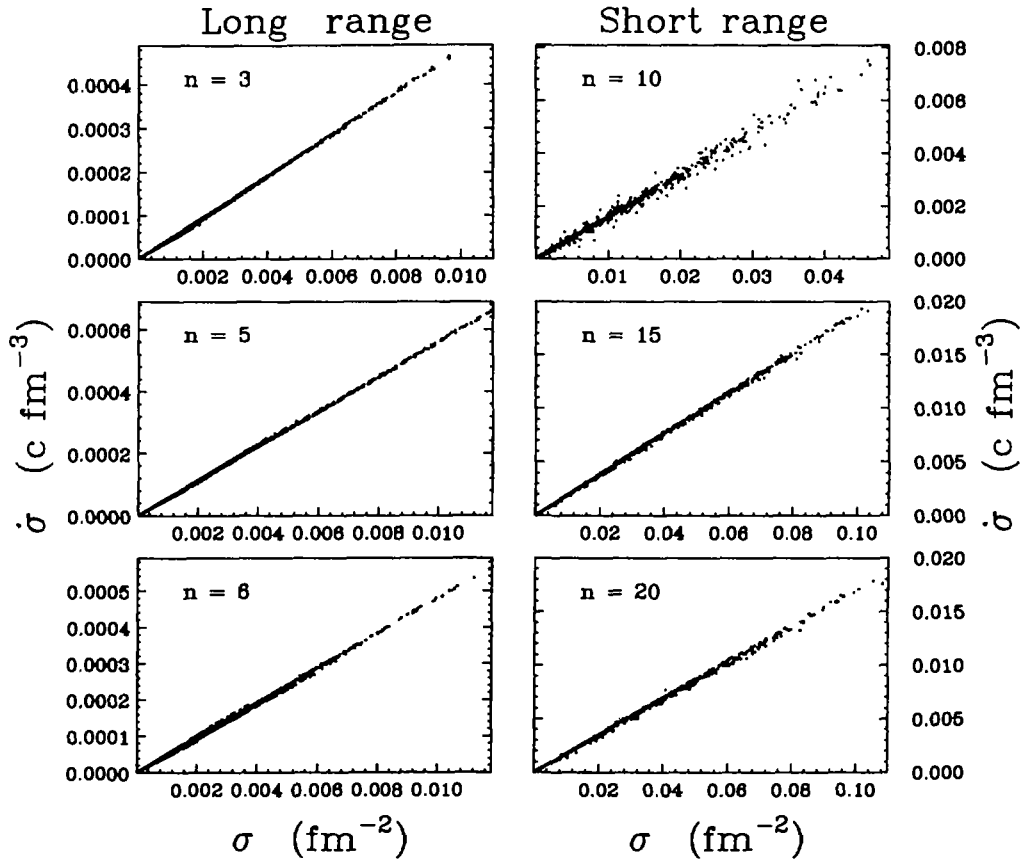


Figure 4.17: Diagramme $(\sigma_k, \dot{\sigma}_k)$ pour des différentes valeurs de $n = L_x \frac{k}{2\pi}$ ($L_x [= 52 \text{ fm}]$ est la longueur de la boîte dans le calcul), obtenu avec 200 événements. Pour chaque événement les valeurs des deux variables sont reportées tous les 5 fm/c, à partir de 5 fm/c jusqu'à 50 fm/c pour l'interaction C, et à partir de 25 fm/c jusqu'à 200 fm/c pour l'interaction L.

utilisés pour caractériser la présence du chaos. Ils sont une condition nécessaire, mais non suffisante pour définir un comportement chaotique.

Pour essayer de mettre en évidence une éventuelle présence du chaos, nous avons proposé une analyse en terme de transformée de Fourier de la densité. Pour un mode k donné, on peut chercher de corréler la "coordonnée" σ_k et la "vitesse" $\dot{\sigma}_k$. Si la dynamique est régulière on obtient une corrélation simple. En fait dans le cas d'instabilité considéré, on devrait observer une simple corrélation linéaire, dont la pente est liée au temps d'instabilité du mode considéré. Sur la figure (4.17) les couples $(\sigma_k^{(n)}, \dot{\sigma}_k^{(n)})$, prises tous les 5 fm/c, sont montrées pour 200 événements différents, pour l'interaction C jusqu'à 50 fm/c et pour l'interaction L jusqu'à 200 fm/c. Après cette phase, la corrélation linéaire disparaît progressivement et le diagramme va se remplir de façon aléatoire.

4.4 Instabilités spinodales et chaos

Une autre façon d'analyser l'évolution est de regarder le coefficient d'amplification

$$A_k(t) = \left| \frac{\sigma_k(t)}{\sigma_k(0)} \right| \quad (4.52)$$

et de considérer la moyenne de $A_k(t)$ sur un ensemble d'événements

$$\bar{A}_k(t) = \frac{\sum_{n=1}^N A_k(t)^{(n)}}{N} \quad (4.53)$$

et sa fluctuation relative $\Delta A_k(t)$

$$\Delta A_k^2(t) = \frac{\sum_{n=1}^N (A_k(t)^{(n)} - \bar{A}_k(t))^2 / N}{\bar{A}_k(t)^2}. \quad (4.54)$$

On peut remarquer que $\Delta A_k(t)$ est une manière de mesurer la dispersion de la corrélation entre la fluctuation initiale et la fluctuation à un temps t , c'est-à-dire la déviation par rapport à une évolution régulière. Quand $\Delta A_k(t)$ est grand par rapport à 1 les fluctuations sont grandes et la corrélation entre les temps initiaux et finals est perdue. Cela correspond à un régime chaotique. Au contraire, si la largeur est petite, le système est dominé par une dynamique régulière. Les comportements de $A_k(t)$ pour 100 événements différents, avec leur valeur moyenne et leur dispersion sont montrés sur les figures (4.18) et (4.19) pour différentes valeurs de k et pour les deux interactions considérées. On peut bien voir que le coefficient d'amplification moyen suit une loi exponentielle durant la première phase de son évolution. Cela est caractéristique d'un régime linéaire. Pour les différents modes, on peut observer que la fluctuation reste petite jusqu'à 5–7 fois le temps d'instabilité. De plus, si on regarde les modes les plus instables ($n = 5$ pour l'interaction L et $n = 15$ pour l'interaction C) à la fin de la simulation, la fluctuation relative est encore plus petite que 1. Ceci démontre que les modes les plus instables sont très robustes et que leur évolution est faiblement perturbée par la dynamique des autres modes.

La conclusion que l'on peut tirer de cette analyse est que, dans la dynamique de champ moyen, le processus de fragmentation est dominé dans une première phase par une amplification exponentielle des modes instables, comme le prédit la théorie de la réponse linéaire. Dans les simulations présentées, cette première phase dure jusqu'à plusieurs fois le temps d'instabilité, notamment jusqu'à quand les fluctuations de densité sont grandes ($\delta\rho/\rho > 0.5$). Le désordre commence à jouer un rôle après, quand les régions à haute densité commencent à interagir. C'est en fait la coalescence des fragments formés par décomposition spinodale qui est à l'origine de ce phénomène. Cette remarque est importante parce que si le processus réel de fragmentation nucléaire est assez rapide (comme, par exemple, dans le cas d'un système ouvert en expansion (cf. §§4.2 et 4.3)) tout l'espace des phases accessible ne peut pas être peuplé de façon chaotique.

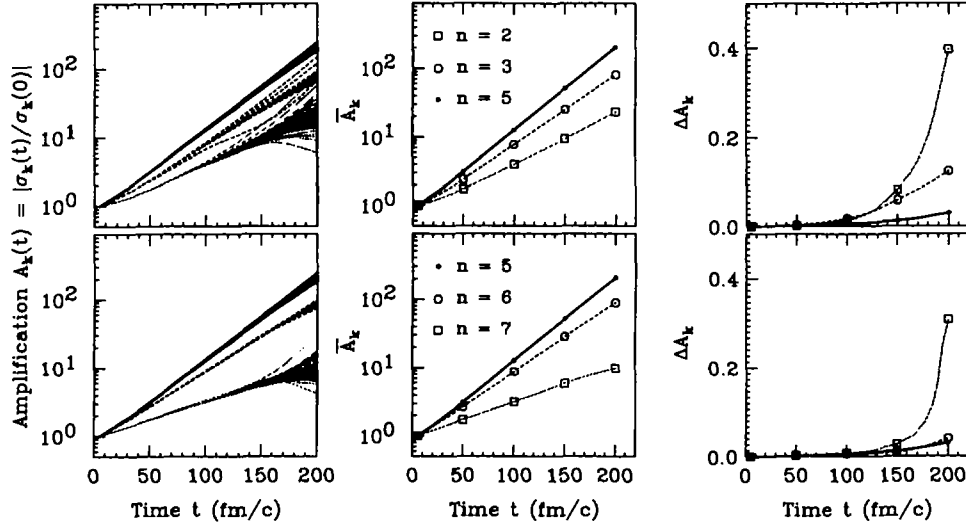


Figure 4.18: Gauche: Evolution temporelle du facteur d'amplification A_k (voir le texte) pour l'interaction L, pour des différentes valeurs de n [$n=5$ (trait continu noir), $n=3$ (trait tireté), $n=2$ (trait continu gris) dans la partie en haut, et $n=5$ (trait continu noir), $n=6$ (trait tireté), $n=7$ (trait continu gris) dans la partie en bas]. Cent événements sont présentés. Centre: Evolution de la valeur moyenne \bar{A}_k calculée sur les cent événements. Droite: Evolution de la fluctuation ΔA_k .

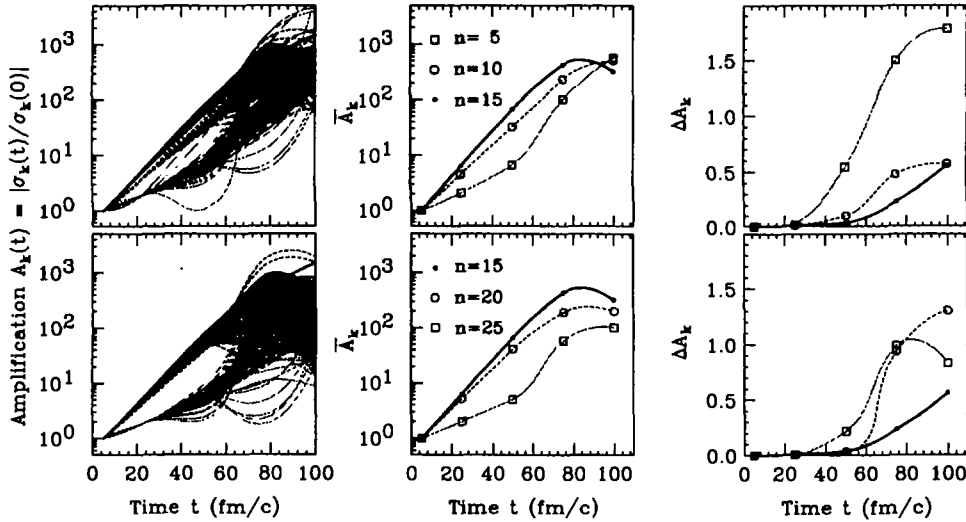


Figure 4.19: Le même que pour la figure (4.18), mais pour l'interaction C. Les valeurs de n considérées sont 15,10 et 5 en haut et 15,20,25 en bas.

4.4 Instabilités spinodales et chaos

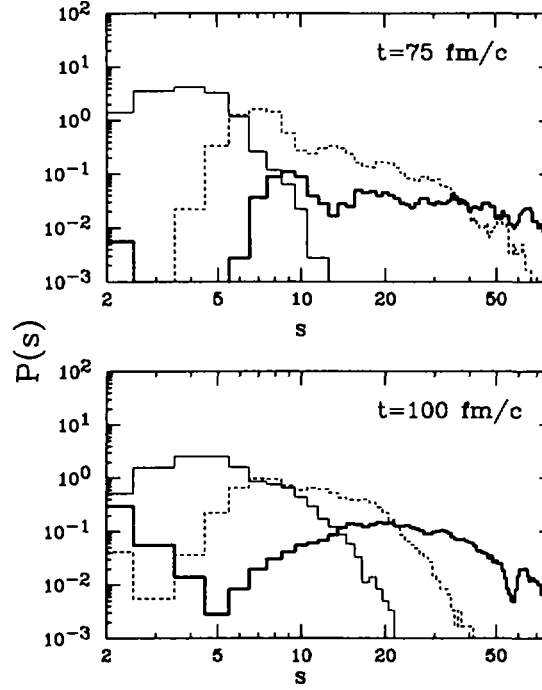


Figure 4.20: Distributions en taille des fragments obtenues pour différentes valeurs de la densité de coupure: $\rho_{coup} = 0.275 \text{ fm}^{-2}$ (trait fin), $\rho_{coup} = 0.1 \text{ fm}^{-2}$ (trait tireté) et $\rho_{coup} = 0.05 \text{ fm}^{-2}$ (trait épais) à deux temps différents.

Finalement, un dernier point qu'il faut clarifier est la signification des distributions en taille dans un système à géométrie fermée. En effet, pour pouvoir définir des fragments, il est nécessaire d'introduire une densité limite de coupure, au-dessus de laquelle une région donnée est considérée occupée. Mais les caractéristiques de la partition peuvent être très dépendantes de la densité de coupure utilisée et surtout du temps auquel la distribution est considérée.

Par exemple sur la figure (4.20) nous montrons les distributions que l'on obtient en considérant trois coupures différentes ($0.05 \rho_{coup}/\rho_0$, $0.1 \rho_{coup}/\rho_0$, $0.2 \rho_{coup}/\rho_0$) et deux temps différents ($75 \text{ fm}/c$ et $100 \text{ fm}/c$). Il est évident que la densité de coupure agit comme un paramètre d'occupation de site dans un calcul de type percolatif, en permettant d'obtenir des formes très différentes pour la distribution en taille. Dès qu'on regarde l'évolution temporelle de la distribution en taille, on s'aperçoit que la distribution change avec le temps de façon très importante. La conclusion de ce point est que, pour un système fermé, on ne peut pas tirer des conclusions sur les distributions en taille. La seule manière d'éviter ces ambiguïtés est de considérer des systèmes ouverts ou en expansion.

Chapitre 5

La décomposition spinodale et les instabilités dans les noyaux

Compte tenu des résultats montrés au chapitre précédent, nous sommes arrivés à la conclusion que les approches stochastiques de champ moyen sont adaptés pour étudier la décomposition spinodale des systèmes instables. Nous pouvons donc étendre notre étude aux noyaux. Pour un système infini à trois dimensions la relation de dispersion que nous avons obtenue analytiquement à partir de la réponse linéaire (cf. §2.7 et figure (2.3)) prédit que, dans un large domaine à l'intérieur de la région spinodale, les modes les plus instables sont caractérisés par des longueurs d'onde autour de $\lambda = 10 \text{ fm}$, auxquelles sont associées des temps d'instabilité autour de $\tau = 40 \text{ fm}/c$. Nous avons vu que dans le cas d'un système fini à deux dimensions les instabilités qui dominent la dynamique sont les mêmes que pour un système infini. Nous attendons le même comportement aussi pour un système réaliste à trois dimensions. Dans ce cas, la situation peut être relativement complexe tant du point de vue de l'analyse, car pour un système fini, les ondes planes ne sont plus des modes propres, que du point de vue physique à cause des phénomènes de battement entre les différents modes instables et d'interaction entre les fragments.

5.1 Relation de dispersion d'un système réaliste fini

Commençons par étudier les modes propres d'un système nucléaire sphérique plongé dans la région spinodale. Nous avons donc simulé l'évolution d'un "noyau" de masse $A=210$, de charge $Z=90$, porté à une température $T = 3 \text{ MeV}$ et à basse densité, autour de la moitié de la densité normale $\rho = \rho_0/2$. Nous avons éventuellement introduit une vitesse d'expansion auto-similaire, c'est-à-dire, une

5.1 Relation de dispersion d'un système réaliste fini

vitesse proportionnelle à la distance du centre. Dans les simulations que nous présentons ci-après la vitesse d'expansion maximale est $v_{exp} = 0.1 c$.

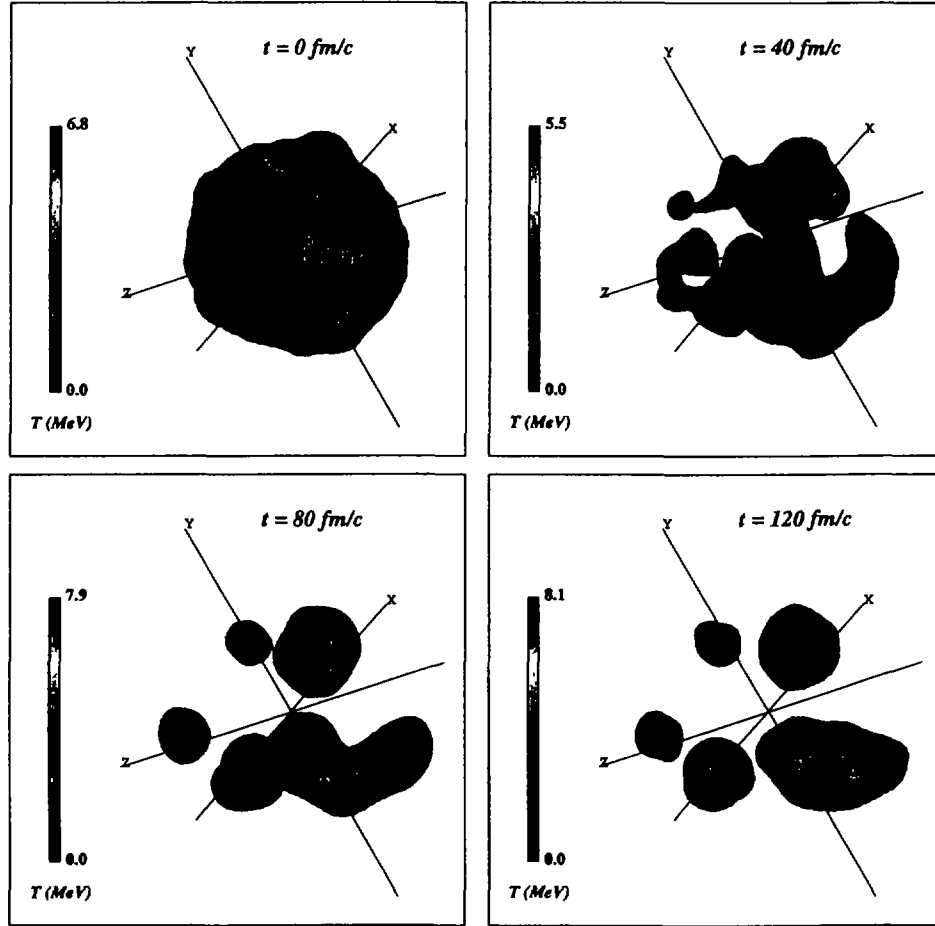


Figure 5.1: Simulation de la décomposition spinodale d'un système nucléaire à $\rho \approx \rho_0/2$ et $T = 3 \text{ MeV}$. Un nombre de fragments lié au mode le plus instable dans la situation considérée est obtenu.

Sur la figure (5.1) nous montrons un résultat typique d'une telle simulation dans l'espace des coordonnées. En particulier la figure montre des surfaces caractérisées par la même valeur de la densité (autour de la moitié de la densité normale, excepté pour le premier temps pour lequel la densité montrée est autour de $0.1 \rho_0$). Il est possible de s'apercevoir que la croissance des fluctuations aboutit, après 120 fm/c, à la formation de 6 fragments de taille comparable, dont deux ont interagis en fusionnant pour former un fragment plus gros.

Dans une vision simplifiée, nous pouvons expliquer ce résultat en admettant que, si la relation de dispersion de la matière infinie s'applique aussi dans le cas

considéré, l'amplification exponentielle des modes les plus instables doit donner

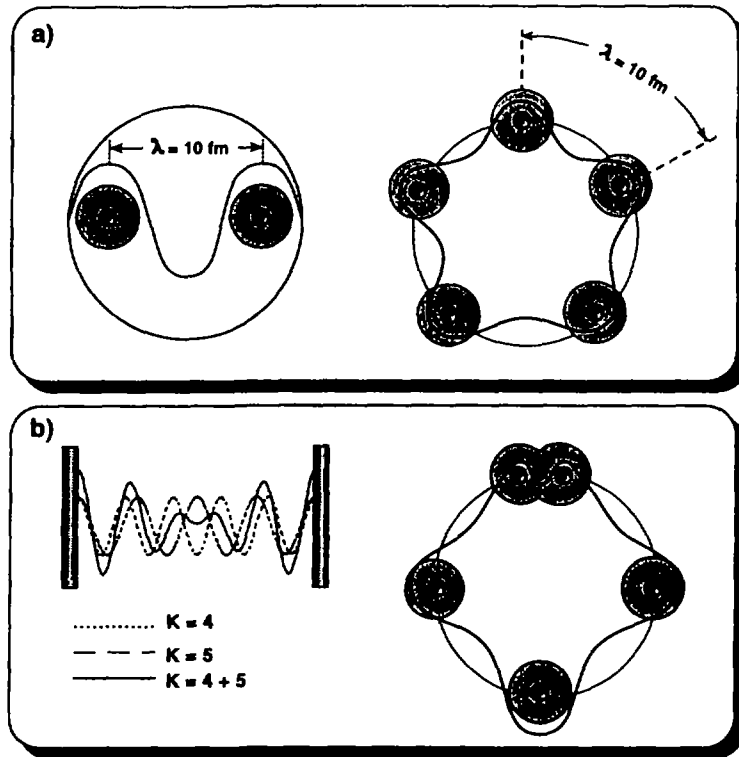


Figure 5.2: Vision simplifiée du processus de formation des fragments par décomposition spinodale, correspondant au développement du mode le plus instable (a) et au battement entre deux modes différents (b).

au processus de fragmentation des caractéristiques précises:

- ⇒ Le temps de formation de fragments à partir de la source diluée est reliée au temps d'instabilité le plus court; en particulier, il faut entre 2 et 3 fois ce temps pour arriver à former des fragments: dans notre cas, on atteint des temps de l'ordre de $100 - 120 \text{ fm}/c$.
- ⇒ Pour pouvoir placer radialement au moins une oscillation avec une longueur d'onde autour de 10 fm , en gardant la symétrie sphérique, le système est obligé, dans le cas que nous avons considéré, à creuser un trou au centre (voir la figure (5.2)); donc la formation de fragment a lieu à la surface.
- ⇒ La matière que se trouve sur la périphérie du système peut avoir 5-6 oscillations correspondant à une longueur d'onde proche de 10 fm (figure (5.2));

5.1 Relation de dispersion d'un système réaliste fini

donc on aurait la formation de fragments distants d'approximativement 10 fm. Il ne faut pas toutefois oublier les phénomènes de battement entre plusieurs modes instables. Par exemple, la figure (5.2) montre le battement entre les modes qui correspondent à la formation de 4 et 5 fragments. A cause de ce phénomène, des fragments peuvent être formés très proches les uns des autres, rester en interaction et fusionner, en donnant ainsi lieu à la formation de fragments plus gros et en moins grand nombre. Cela est analogue au cas de la fission asymétrique pour laquelle les modes $L=2$ et $L=3$ sont en compétition.

Pour avoir un aperçu plus approfondi sur la phase initiale de la formation des fragments, nous avons analysé la réponse de petite amplitude d'un ensemble d'événements avec les mêmes conditions initiales "macroscopiques" [Gua96a].

Premièrement, nous avons étudié la distribution radiale de matière en fonction du temps (figure (5.3a)). Nous pouvons observer que les fragments sont formés à la périphérie et que le centre du système est ainsi dépeuplé.

Puisque L et M sont des bons nombres propres pour la matrice RPA d'une source sphérique, nous nous attendons à observer des modes qui ressemblent au développement multipolaire d'ondes planes. Nous avons donc effectué une analyse des fluctuations de densité en termes des harmoniques sphériques et nous avons considéré l'observable suivante:

$$\sigma_L(k) = \sum_M \left\langle \left| \int d\mathbf{r} j_L(kr) Y_{LM}^*(\Omega) \delta\rho(\mathbf{r}, t) \right|^2 \right\rangle \quad (5.1)$$

qui n'est rien d'autre que la projection de la fonction de corrélation $\sigma_\rho = \langle \delta\rho\delta\rho \rangle$ sur les fonctions $j_L(kr)Y_{LM}(\Omega)$.

Tout d'abord, nous avons étudié, pour une valeur de la multipolarité fixée et pour un temps fixé, la quantité $\sigma_L(k)$ en fonction de k . La figure (5.3b) montre $\sigma_L(k)$ à 100 fm/c pour une valeur de la multiplicité ($L = 5$). En fait, pour pouvoir comparer les résultats pour des valeurs différentes de L , il est préférable d'introduire un nombre d'onde réduit défini par la relation $k_{red}^L = k/d_L$ où d_L est l'argument du premier maximum de la fonction de Bessel $j_L(d)$. Nous avons observé que $\sigma_L(k)$ possède un maximum qui correspond à la même valeur de k_{red} quelle que soit la multipolarité considérée (entre $L = 2$ et $L = 7$): $k_{red}^{max} = 0.1 \text{ fm}^{-1}$. Cela montre que la structure radiale des modes instables est la même pour les différentes valeurs de L . En effet, le maximum à $k_{red} \approx 0.1 \text{ fm}^{-1}$ conduit à $\lambda = 1/k_{red} \approx 10 \text{ fm}$.

Ensuite, nous avons étudié l'évolution temporelle de $\sigma_L(k)$ pour le mode $L = 5$, $k_{red} = 0.1 \text{ fm}^{-1}$ (voir la figure (5.3d)). On observe une croissance exponentielle, d'après laquelle est possible calculer un temps caractéristique $\tau \approx 35 \text{ fm/c}$ qui est en bon accord avec le temps calculé pour un système infini.

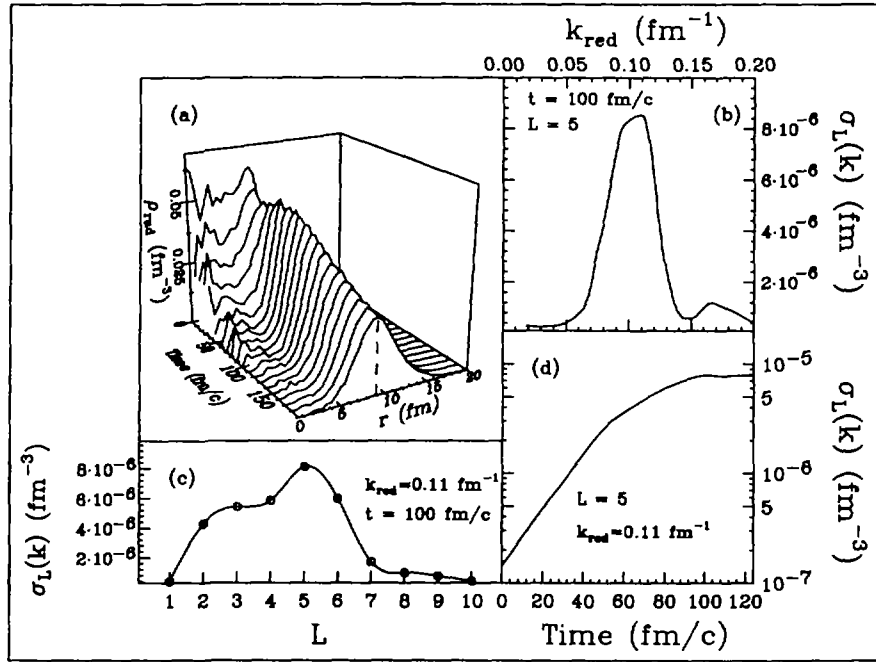


Figure 5.3: a) Distribution radiale de matière en fonction du temps pour une source sphérique de 210 nucléons plongée dans la région spinodale. b) Fonction de corrélation $\sigma_L(k)$ en fonction de k_{red} (voir texte) pour $L = 5$. c) La même quantité mais en fonction de la multipolarité L pour $k_{red} = 0.11 \text{ fm}^{-1}$. d) Evolution temporelle de $\sigma_L(k)$ pour le mode le plus instable.

5.1 Relation de dispersion d'un système réaliste fini

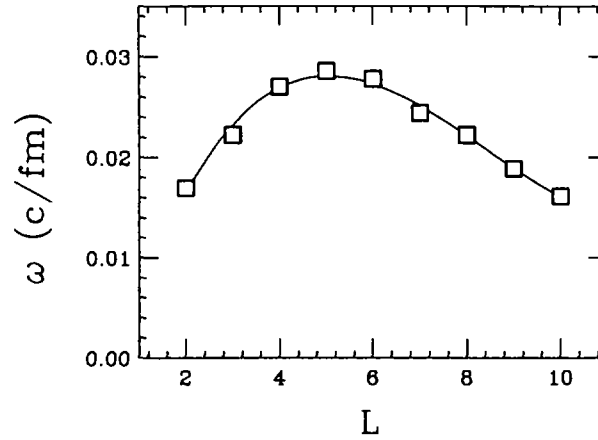


Figure 5.4: Temps d'instabilité pour les différentes valeurs de L obtenus à partir de l'analyse de la croissance exponentielle de $\sigma_L(k)$, comme dans la figure 5.3d.

Finalement, nous pouvons analyser, à un temps donné (100 fm/c pour la figure), la quantité $\sigma_L(k)$, prise en son maximum autour de $k_{red} = 0.1 \text{ fm}^{-1}$, en fonction de la multipolarité L (figure (5.3c)). La valeur de la multipolarité pour laquelle $\sigma_L(k)$ a son maximum est $L = 5$ qui correspond à l'introduction sur la surface de cinq ondulations de la densité. On observe, comme dans le cas de la matière nucléaire infinie, une coupure ultra-violette, qui ici, à cause de la taille finie du système apparaît comme une coupure pour les grandes valeurs de L . Toutefois, il est possible de remarquer que la distribution de modes instables autour du mode $L = 5$ est fort large, surtout si l'on tient compte du fait que la somme sur M dans la définition (5.1) introduit un facteur de dégénérescence $(2L + 1)$. Ceci nous indique que dans un système fini la relation de dispersion présente une coupure pour les petites longueurs d'onde, mais que les autres modes (entre 2 et 6) ont des temps d'instabilité très proches. Cette déduction est facilement confirmée par l'étude de l'amplification exponentielle des modes instables (voir la figure (5.4)) qui montre que la relation de dispersion en fonction de L est relativement plate jusqu'à la coupure ultra-violette à grands L . Cette propriété est clairement un effet de taille finie et peut avoir comme conséquence la production de fragments de grande taille.

5.1.1 Les effets de taille

Dans le but d'étudier l'effet lié à la taille du système, nous avons aussi effectué une série de calculs pour trois sources différentes avec les masses: $A=40$, $A=100$, $A=210$ [Col96a]. Les trois systèmes ont été initialisés à moitié de la densité de saturation, à une température de 3 MeV et avec une vitesse auto-similaire

maximale de 0.1 c. Dans ce cas nous nous sommes limités à calculer la projection de la densité sur les harmoniques sphériques:

$$\sigma_L = \sum_M \prec \left| \int d\mathbf{r} Y_{LM}^*(\theta, \phi) \delta\rho(\mathbf{r}, t) \right|^2 \succ. \quad (5.2)$$

La figure (5.5) montre l'évolution dynamique d'un événement pour chacun des trois systèmes: le noyau de masse 40 se casse en trois fragments mais, à cause de l'interaction, deux entre eux vont se recoller afin de former deux fragments asymétriques; le noyau de masse 100, dans le cas que nous présentons ici, va donner cinq fragments; le noyau de masse 210, six fragments. Nous pouvons ainsi remarquer une certaine relation entre la masse initiale et le nombre de fragments formés. Pour être quantitatif et s'affranchir de la limitation liée au fait de ne regarder qu'un événement, nous avons étudié la quantité σ_L obtenue en considérant 100 événements pour chaque système.

C'est ce que montre la figure (5.6). A gauche nous avons représenté σ_L en fonction de L à deux temps différents, $t = 50 \text{ fm}/c$ (en continu) et $t = 100 \text{ fm}/c$ (en tireté). Il est possible de voir que les deux systèmes les plus gros sont essentiellement instables par rapport à des grandes valeurs de L . Ces modes correspondent à la formation, à partir de la source initiale diluée, de régions à haute densité avec une distance moyenne de l'ordre de la longueur d'onde la plus instable $\lambda = 10 \text{ fm}$. Dans le cas du système formé de 40 nucléons les modes instables sont $L = 2$ et $L = 3$. Il est aussi possible de voir que pour le système de 210 nucléons les interactions dans la voie de sortie ne jouent pas un rôle très important; en effet le mode $L = 5$ est prédominant à $50 \text{ fm}/c$ mais aussi à $100 \text{ fm}/c$. Par contre, dans le cas du système de masse 100 et encore plus dans le cas du système de masse 40 l'interaction entre les fragments formés dans la phase initiale change au temps $100 \text{ fm}/c$ le mode dominant (dans le cas $A=40$ de manière nette). Cela veut dire qu'il y a un certain nombre d'événements (important pour le système plus petit) dans lesquels deux fragments se sont collés dans la voie de sortie. Dans ce phénomène un rôle très important est joué, comme on a déjà eu la possibilité de voir, par la vitesse d'expansion et par la répulsion coulombienne. La partie droite de la figure (5.6) montre l'évolution temporelle de σ_L pour le mode le plus instable dans la phase initiale. On peut bien voir que la croissance exponentielle prédite par la théorie de la réponse linéaire est claire dans le trois cas. Les temps caractéristiques que l'on peut extraire de ces courbes sont autour de $41 \text{ fm}/c$ pour le système de masse 210, $47 \text{ fm}/c$ pour le système de masse 100 et $57 \text{ fm}/c$ pour le système de masse 40. Ces valeurs sont en accord avec les temps prévus pour la croissance des instabilités dans la région spinodale, la taille finie du système réduisant peu l'instabilité. En particulier, le temps obtenu pour le noyau de ^{40}Ca est en accord avec des calculs RPA avec contrainte pour un tel système [Vau86].

Nous voulons aussi faire remarquer que les caractéristiques que nous venons

5.1 Relation de dispersion d'un système réaliste fini

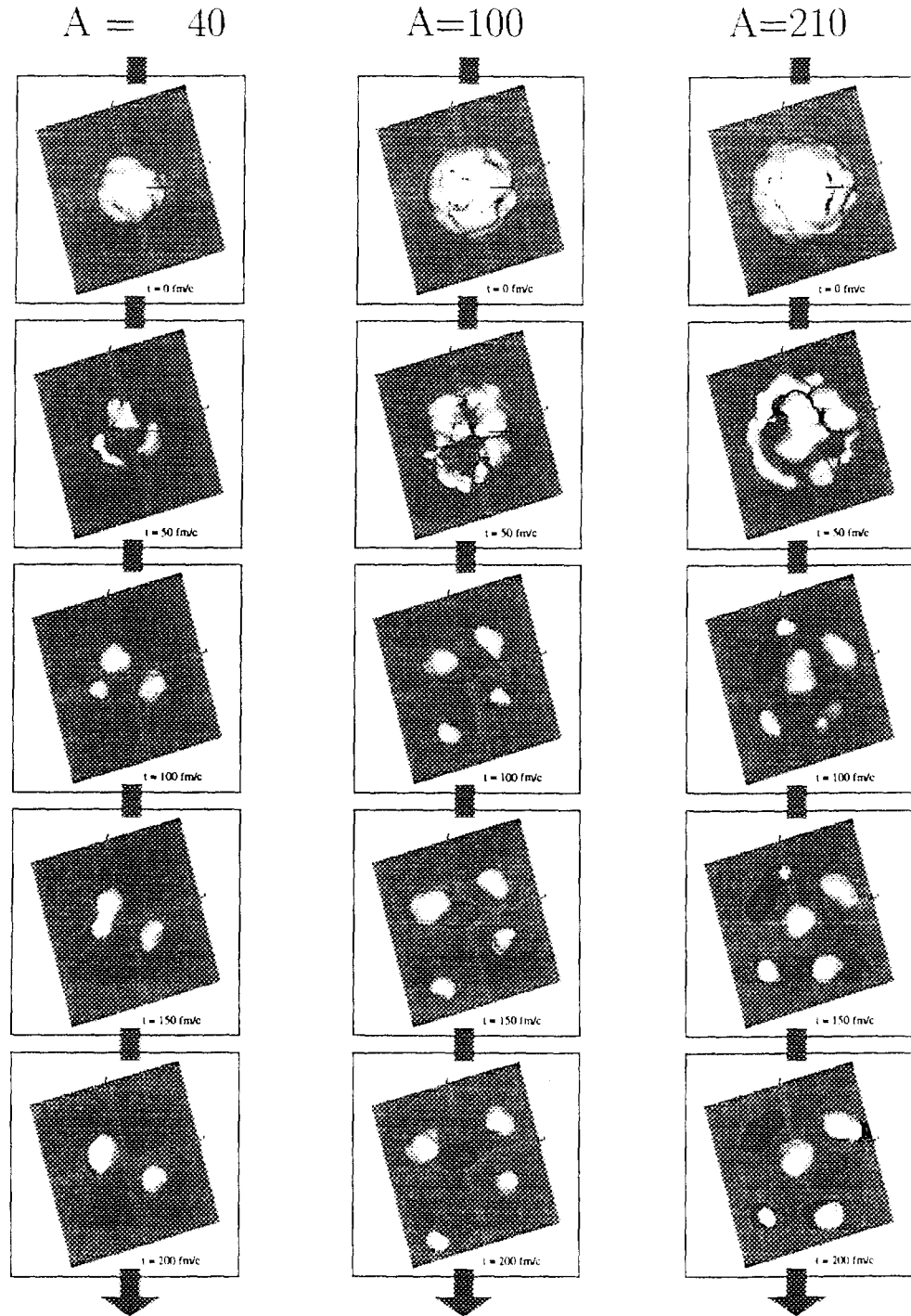


Figure 5.5: Événements typiques de fragmentation pour des systèmes nucléaires sphériques de $A=40, 100, 210$ nucléons à $\rho = \rho_0/2$ et $T = 3$ MeV.

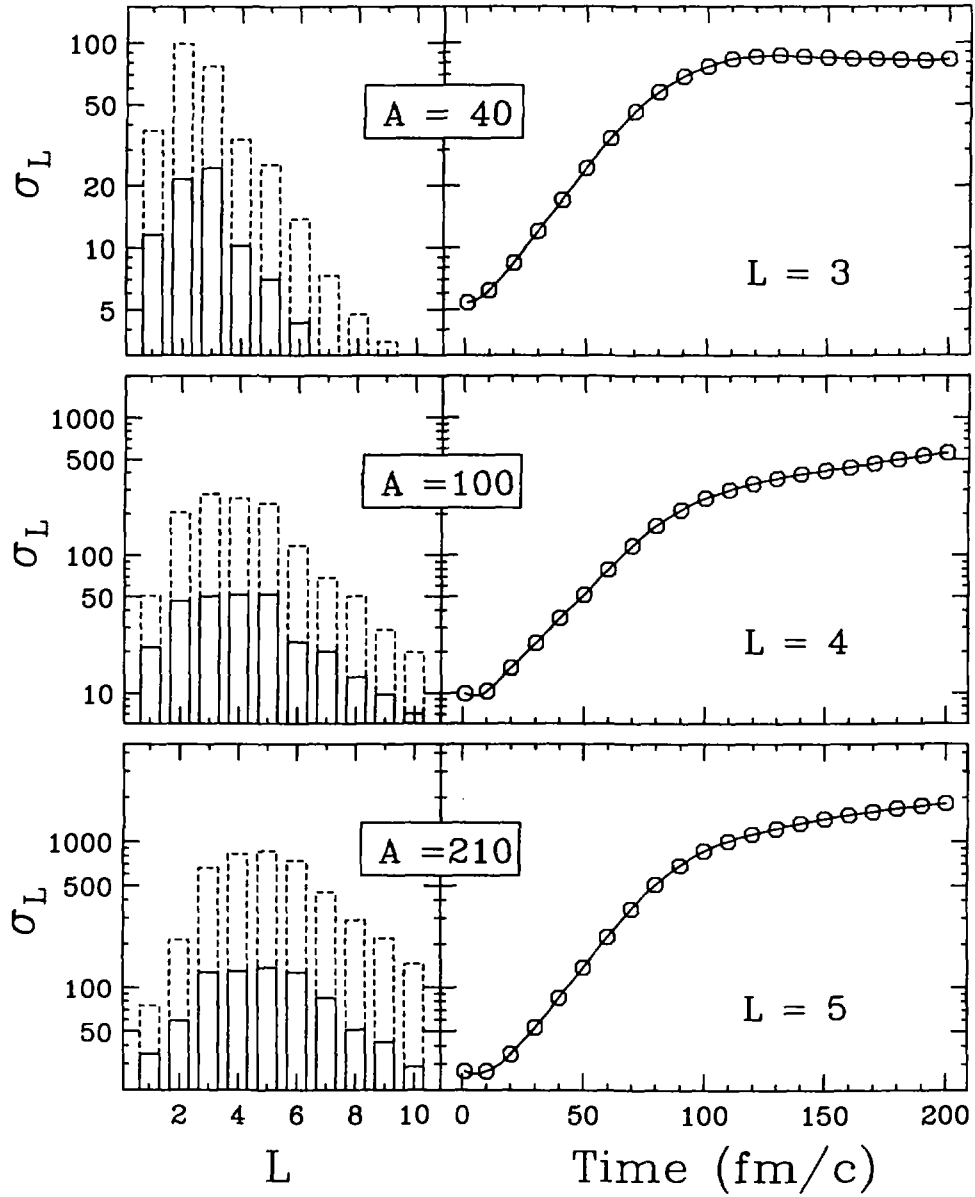


Figure 5.6: A gauche, la variance σ_L en fonction de L après 50 fm/c (histogramme continu) et 100 fm/c (histogramme en tiret) dans le cas des noyaux de $A=40,100,210$. A droite, l'évolution temporelle de σ_L pour le mode le plus instable dans chaque cas.

5.1 Relation de dispersion d'un système réaliste fini

de décrire sont robustes et que l'on obtient des résultats tout à fait similaires pour une gamme large de vitesses et de moments angulaires.

5.1.2 Les effets de forme

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des sources sphériques. Toutefois, il peut être intéressant d'étudier le rôle de la forme initiale de la source sur la topologie de la partition finale des fragments. En effet dans les dernières années, il y a eu un fort débat sur la possibilité d'avoir de formes "exotiques", comme des toroïdes ou des bulles, pour ce qui concerne la distribution spatiale des fragments [Mor92, Bau92, Xu93, Bor93]. Dernièrement ces types de formes semblent peut-être avoir été observé expérimentalement [Dur96a, Sto96].

Nous avons donc comparé les résultats obtenus pour la source sphérique de masse 210 avec des simulations effectuées pour une source aplatie avec un rapport d'aspect de 2:1 et ayant même masse, densité et température. Sur la figure (5.7) l'évolution d'un de ces événements est montrée. Dans ce cas aussi, le processus de fragmentation se passe par le développement d'instabilités spinodales, et la formation d'un trou au centre est la seule manière permise au système pour développer les modes les plus instables, compte tenu de sa faible taille.

Une confirmation de cette interprétation est donnée par une analyse en multipolarité analogue à celle faite pour la sphère. Dans ce cas, toutefois, on a seulement une symétrie de révolution autour d'un axe. Il faut donc étudier la quantité

$$\sigma_M = \left\langle \left| \int d\mathbf{r} e^{iM\phi} \delta\rho(\mathbf{r}, t) \right|^2 \right\rangle \quad (5.3)$$

où ϕ est l'angle formé par la projection de \mathbf{r} sur le plan de symétrie. La figure (5.8) présente les résultats de cette analyse ainsi que, pour comparaison, les résultats obtenus pour la sphère.

La partie à droite montre des contours de densité radiale en fonction du temps et de la distance au centre du système calculés pour des ensembles de 100 événements. Dans les deux cas, la formation d'un trou au centre est évidente.

Dans la partie à gauche, on peut voir les quantités σ_M et σ_L (définies par les équations (5.3) et (5.2)) dans le cas du disque et de la sphère respectivement. La prédominance des multipolarités 5 et 6, correspondant à la formation de fragments dont la distance relative est autour de 10 fm, est une signature du développement des instabilités spinodales. Cette signature est renforcée par l'observation du temps de croissance du mode le plus instable qui est de 40 fm/c en très bon accord avec le temps obtenu dans le cas de la sphère et le temps prévu par la relation de dispersion d'un système infini.

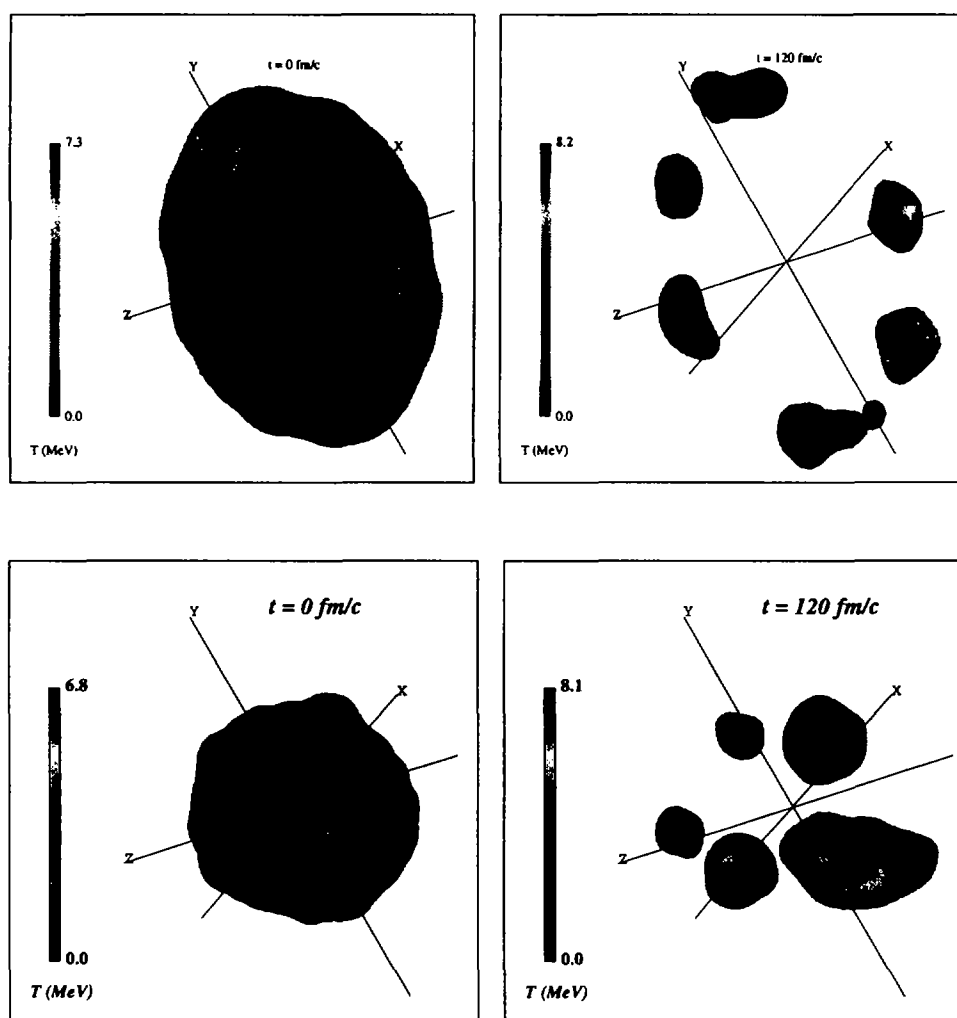


Figure 5.7: Simulation de la décomposition spinodale d'une source dont la forme est un disque avec un rapport d'aspect 2:1 (en haut). Pour comparaison nous présentons de nouveau la simulation faite pour une source sphérique (en bas).

5.1 Relation de dispersion d'un système réaliste fini

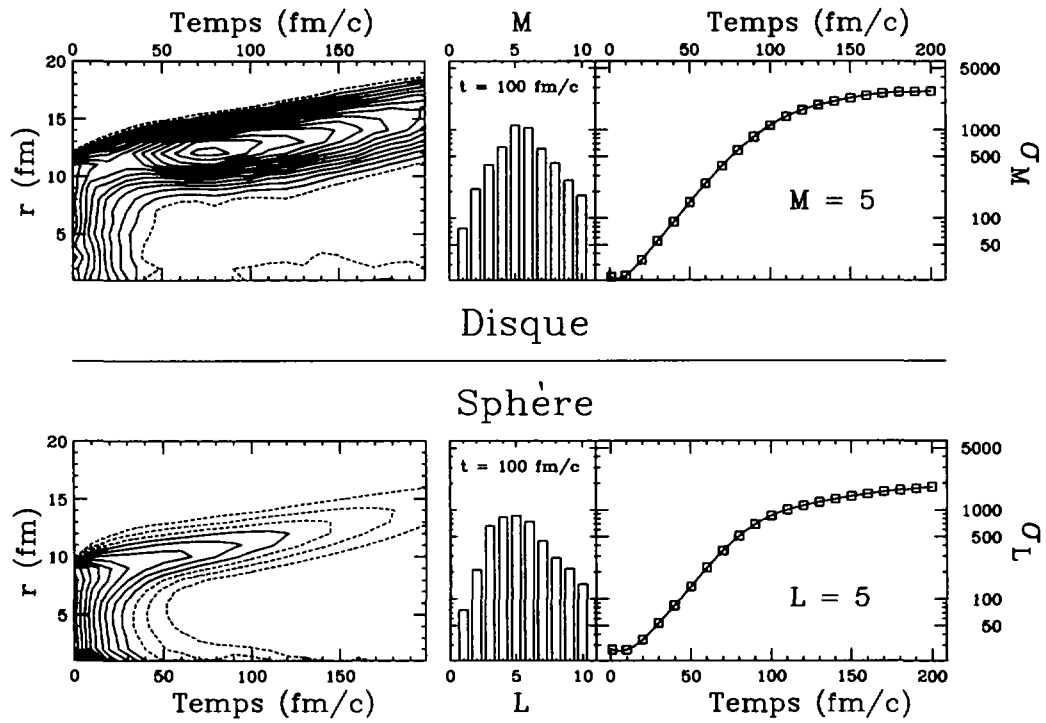


Figure 5.8: Comparaison des résultats obtenus de l'analyse des sources sphériques et en forme de disque. Sont montrées: à gauche, l'évolution temporelle de la densité en fonction de la distance au centre; au centre, l'amplitude des fluctuations à $t=100 \text{ fm/c}$ en fonction de L et M ; à droite, l'évolution temporelle de l'amplitude des fluctuations pour le mode le plus instable.

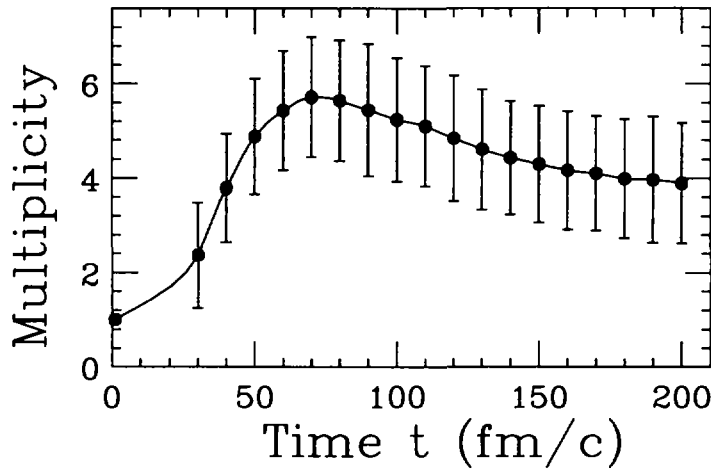


Figure 5.9: Nombre moyen de fragments en fonction du temps. Les barres indiquent la dispersion autour de la valeur moyenne.

5.2 La distribution de masse

Contrairement à un système fermé, dans lequel les fragments restent en interaction, dans un système ouvert nous avons vu que l'interaction entre les fragments cesse d'être importante après un certain temps à partir duquel la distribution de masse (ou de charge) peut être considérée figée.

Cet effet peut être observé dans l'évolution de la multiplicité moyenne (calculée sur un ensemble de 427 événements) de fragments obtenus par décomposition spinodale de la source introduite au début du chapitre, présentée sur la figure (5.9). Nous pouvons voir, d'abord, que 5-6 fragments sont formés après 100 fm/c, ce qui est en accord avec les résultats précédents concernant les modes les plus instables et les temps liés à ces modes. En suite, des phénomènes de coalescence interviennent à cause de l'interaction entre les fragments et des battements entre les différents modes instables, et la multiplicité moyenne diminue pour finalement rejoindre une valeur de saturation quand la distribution est figée.

A partir de ce temps, nous pouvons étudier la distribution en charge moyennée sur les 427 événements. Nous pouvons remarquer en cette observable (figure (5.10), trait fin) trois caractéristiques importantes:

1. l'absence de fragments petits ($Z < 4$), lié au fait que les modes avec des petites longueurs d'onde (ou des valeurs de L grandes) ne sont pas instables.
2. le plateau autour de la charge 10, qui est une signature de la présence de

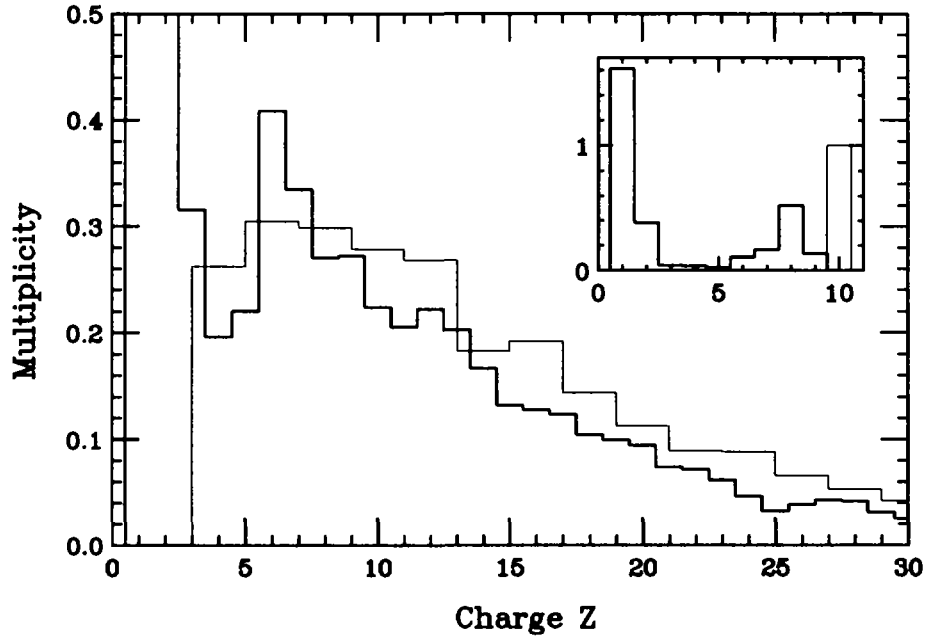


Figure 5.10: Distribution en charge des fragments obtenue avant (ligne fine) et après (ligne épaisse) la phase de désexcitation, pour une source dont la température initiale est de 3 MeV. Les produits de désexcitation d'un noyau de Néon sont montrés dans l'insert.

partitions privilégiées correspondant aux modes les plus instables.

- la présence d'une longue traîne à grandes masses provenant du battement de différents modes, des instabilités liées à des grandes longueurs d'onde (ou à des valeurs de L petites), des effets de coalescence dus à l'interaction entre les fragments avant qu'ils se soient assez éloignés les uns des autres.

Ces propriétés de la distribution primaire sont robustes: nous avons obtenu des distributions de charge tout à fait similaires pour un vaste domaine des caractéristiques de la source initiale. En particulier en faisant varier la température entre 0 et 5 MeV, la vitesse d'expansion entre 0.05c et 0.25c et même en introduisant un spin variant entre 0 et 100 \hbar , les conclusions essentielles de ce paragraphe ne changent pas.

Maintenant la question qui se pose est: les caractéristiques de la décomposition spinodale que l'on vient de présenter sont elles affectées par la phase de désexcitation?

En effet, jusqu'à là nous n'avons parlé que de la distribution primaire. Mais il faut tenir compte du fait que la décomposition spinodale a lieu à température finie et que par voie de conséquence les fragments formés sont chauds. Donc nous avons été obligés de prendre en considération l'évaporation et d'étudier plus en

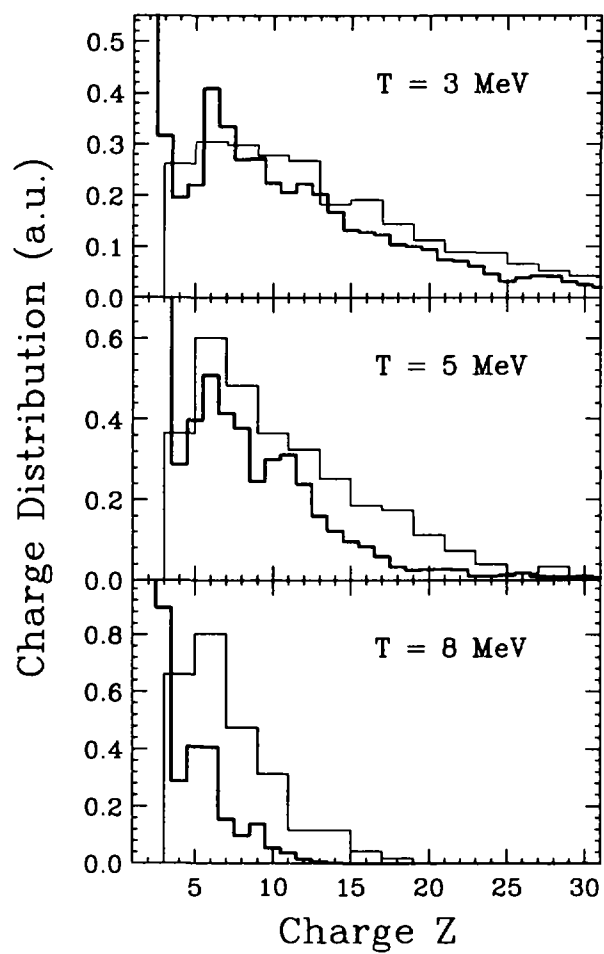


Figure 5.11: Distribution en charge des fragments avant (trait fin) et après (trait épais) la phase de deexcitation pour trois valeurs différentes de la température de la source.

5.3 Vers des observables exclusives

détail l'effet de la température initiale de la source sur la distribution de charge finale.

La température des fragments est calculée à partir de l'énergie cinétique associée au mouvement désordonné des particules appartenant au fragment, à laquelle l'énergie associée au mouvement de Fermi (correspondant à la densité du fragment) est soustraite. La température est ensuite obtenue en utilisant la relation entre cette observable et l'énergie d'excitation moyennant le paramètre densité de niveau, lui aussi dépendant de la densité. Nous avons remarqué que le processus de formation des fragments est presque isotherme: par exemple pour une température initiale de la source de 3 MeV les fragments sont formés avec des températures qui varient entre 3 et 4 MeV. Nous avons donc appliqué événement par événement un code de désexcitation aux fragments formés; en particulier, dans les cas que nous traiterons dans ce paragraphe, nous avons appliqué le code GEMINI [Cha88]. La figure (5.10) montre (trait épais) la distribution finale en charge des fragments. Nous pouvons observer que, même si le maximum a légèrement bougé vers des charges plus petites, un signal est encore observable. En effet, pour les énergies d'excitation concernées dans le cas considéré, le chemin de désexcitation d'un noyau de néon, par exemple, donne lieu à la formation d'un résidu d'oxygène ou de carbone associé avec des alphas d'évaporation (voir l'insert dans la figure (5.10)).

Parmi toutes les variations des paramètres de la source, il est maintenant intéressant d'étudier comment la distribution finale va être affectée par la température initiale de la source. Nous avons donc comparé les distributions en charge pour différentes valeurs de la température. Sur la figure (5.11) nous montrons cette comparaison pour les températures initiales de la source de 3 MeV, 5 MeV et 8 MeV. Nous pouvons bien voir que la distribution se déplace vers les charges plus petites en indiquant que des événements de vaporisation se produisent.

Mais le point essentiel est sûrement que pour des températures de plus en plus hautes un éventuel signal dans la distribution de charge inclusive devient de plus en plus faible, la distribution se rapprochant de plus en plus de celles décroissant de façon monotone des approches statistiques.

De plus, on peut voir qu'à toutes les températures le signal est relativement faible avec un rapport pic sur fond inférieur à 1 et qu'il suffit donc d'une légère augmentation des fluctuations ou d'un mélange avec des événements provenant de différentes sources pour noyer ce signal dans les distributions inclusives.

5.3 Vers des observables exclusives

Pour comparer les résultats obtenus avec des données expérimentales et trancher entre les différents modèles, la distribution en charge donc n'est pas suffisante. Il

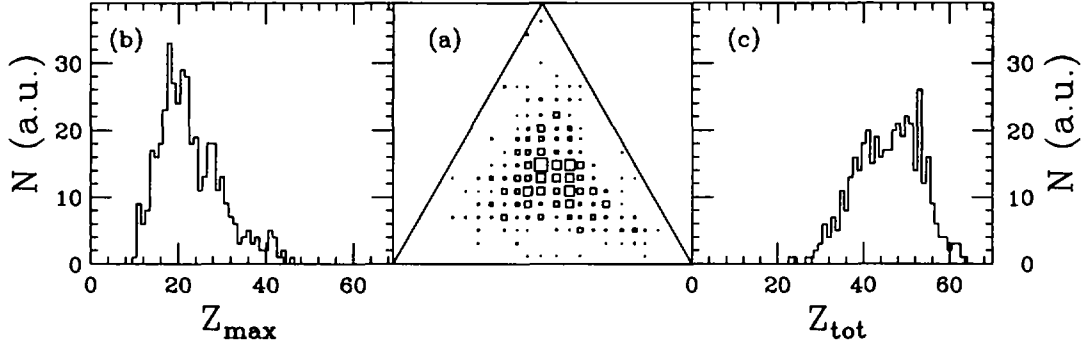


Figure 5.12: Analyse des caractéristiques des trois fragments les plus gros dans chaque événement dans le cas de la source avec une température initiale de 3 MeV. a) Diagramme de Dalitz. b) Distribution en charge du fragment le plus gros. c) Distribution en charge de la somme des charges des trois fragments.

nous faut trouver des critères plus exclusifs pour essayer de signer une décomposition spinodale. Nous avons donc étudié directement les partitions obtenues. Par exemple, nous pouvons faire une analyse événement par événement des caractéristiques des trois plus gros fragments [Gua96a]. Dans la figure (5.12) nous avons effectué cette analyse pour les 427 événements simulés pour la source à la température initiale de 3 MeV. Nous avons regardé le diagramme de Dalitz, la distribution en charge du plus gros fragment et la distribution en charge de la somme des charges des trois fragments les plus gros.

Les diagrammes de Dalitz nous informent sur l'asymétrie en charge entre les trois plus gros fragments de chaque événement. Dans cette représentation, chaque événement est caractérisé par trois quantités qui sont les distances à chacun des trois côtés d'un triangle équilatéral

$$d_i = \frac{Z_i}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ainsi, les événements qui se situent aux sommets du triangle correspondent à des partitions où il n'y a qu'un fragment lourd associé à de plus petits fragments. Les événements pour lesquels deux fragments seulement ont une taille similaire et le troisième est plus petit se situent dans un point intermédiaire sur un des côtés du triangle. Les événements pour lesquels les trois fragments ont une taille similaire se situent près du centre du triangle.

Le fait de remplir, dans la figure (5.12), la région centrale du diagramme de Dalitz est une confirmation du fait qu'il y a beaucoup de partitions avec des fragments de masse proche. La distribution de charge du plus gros fragment

5.4 Application de la méthode BOB au cas tridimensionnel

piquée à une valeur légèrement plus basse que 20 et la distribution de la somme des trois charges piquée autour de 45 est une indication du fait que dans le cas considéré (température de 3 MeV relativement basse) ils restent des fortes fluctuations en masse dues aux instabilités de petit L et au phénomène de collage.

5.4 Application de la méthode BOB au cas tridimensionnel

Tous les résultats que nous avons montrés ont été obtenus avec la méthode SIM (cf §3.3.1) dans laquelle des fluctuations, dont l'amplitude est déterminée par la théorie de Boltzmann-Langevin, sont introduites dans les conditions initiales. Nous avons voulu vérifier la robustesse de ces prédictions, en effectuant des simulations dans lesquelles les fluctuations ont été introduites avec une méthode différente. Nous avons, en particulier, considéré la méthode BOB décrite au paragraphe 3.3.2 et nous l'avons appliqué au cas tridimensionnel.

Les simulations que nous avons effectuées concernent un noyau d'or fortement comprimé initialement puis laissé libre de se dilater. En accord avec ce qui est prévu par la méthode BOB, quand le système (ou une partie du système) se trouve dans la région spinodale, chaque particule du système (ou du sous-système) subit une force additionnelle choisie au hasard dans une distribution gaussienne de valeur moyenne nulle et dont la variance est reliée à $\tilde{\mathcal{D}}_0$ (cf. équation 3.15).

La figure (5.13) présente les résultats de l'analyse de 100 événements "générés" de cette façon. Nous observons (à gauche) que l'évolution de la distribution radiale de matière montre la dilatation du système pendant les premiers 30 fm/c suivie par la formation d'un trou au centre. Au centre de la figure, la quantité σ_L , définie par l'équation 5.2, à 100 fm/c montre que le mode favorisé correspond à la multipolarité $L = 5$. Finalement, à droite, l'évolution temporelle du mode $L = 5$ montre une croissance exponentielle avec un temps caractéristique autour de 35 fm/c. Ces caractéristiques sont identiques à celles que nous avons obtenu avec la méthode SIM. Un deuxième test a été effectué pour la distribution en charge des fragments obtenus à 200 fm/c. La figure (5.14) montre cette distribution en charge pour une densité de coupure de 0.07 fm^{-3} . Toutes les caractéristiques obtenues avec la méthode SIM sont reproduites.

Nous pouvons donc conclure que les deux méthodes d'introduction du bruit que nous avons utilisé sont équivalentes, dans les situations que nous sommes en train de considérer. Dans la suite, nous avons utilisé la méthode SIM.

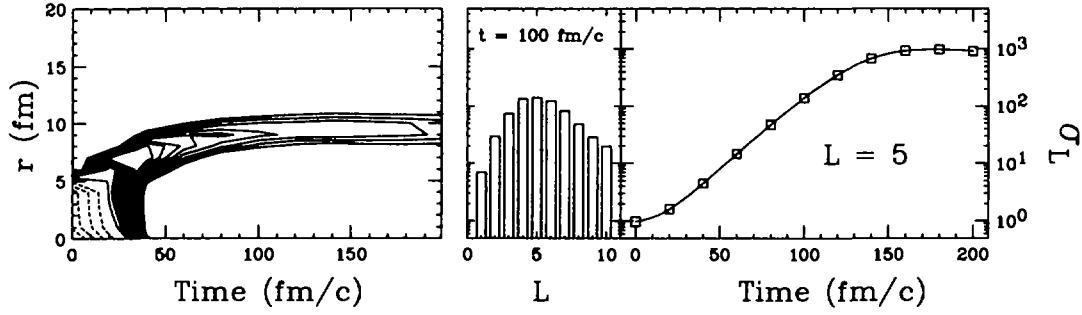


Figure 5.13: Résultats obtenus pour l'analyse des sources d'or sphériques dans lesquelles les fluctuations sont introduites avec la méthode BOB. Sont montrées: à gauche, l'évolution temporelle de la densité en fonction de la distance au centre; au centre, l'amplitude des fluctuations à $t=100$ fm/c en fonction de L ; à droite, l'évolution temporelle de l'amplitude des fluctuations pour le mode le plus instable.

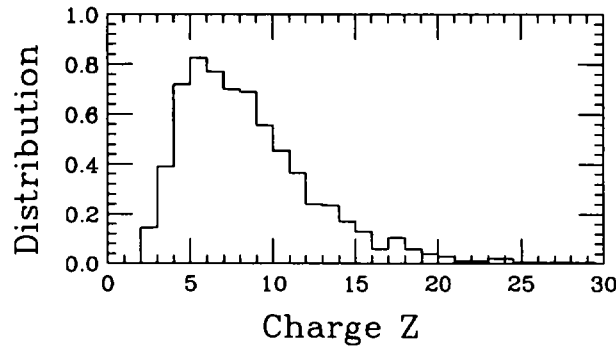


Figure 5.14: Distribution en charge obtenue avec la méthode BOB à 200 fm/c et pour une densité de coupure de 0.07 fm^{-3} .

5.5 La comparaison avec les données expérimentales

Les informations sur l'éventuelle décomposition spinodale des noyaux dans la multifragmentation sont donc à rechercher dans les partitions primaires typiques caractérisées par une relative absence de petits fragments associée à une certaine surabondance de fragments de taille proche. En particulier, l'analyse que nous avons effectuée au paragraphe précédent, consistant à regarder simultanément le diagramme de Dalitz et les distributions en charge des trois plus gros fragments, est probablement un outil adapté à ce but, qu'il nous faut maintenant comparer à l'expérience. Il faut remarquer que cette comparaison doit être effectuée pour les événements provenant des collisions les plus centrales et donc du point de vue expérimental il est très important de sélectionner ce type de collisions. Nous avons donc considéré deux systèmes :

- le système $Xe + Cu$ à 45 MeV par nucléon pour lequel les données expérimentales de la collaboration Multics [Bru92, Bru94] semblent donner des indications similaires à celles que nous proposons.
- le système $Xe + Sn$ à 50 MeV par nucléon pour lequel les hautes performances du multidétecteur Indra nous donnaient beaucoup d'espoir d'avoir des données de très haute qualité.

5.5.1 La réaction $Xe + Cu$ à 45 MeV par nucléon

L'intérêt pour cette réaction vint du fait que expérimentalement avait été rapportée la "production de trois fragments de masse presque égale" [Bru92]. En effet les auteurs des références [Bru92, Bru94] ont effectué une étude systématique pour les événements à trois fragments de la collision $Xe + Cu$ à 45 MeV par nucléon. En se basant sur des observations cinématiques, ils arrivent à sélectionner des événements qui proviennent essentiellement des collisions les plus centrales. Les conclusions de cette analyse expérimentale sont que dans les collisions les plus centrales les événements de multiplicité trois sont caractérisés par une partition privilégiée du système en fragments de taille presque égale autour de la charge $Z = 10$. En effet, on peut bien observer (voir la figure (5.15)) que pour les événements considérés la région centrale du diagramme de Dalitz est peuplée et que la somme des charges des trois fragments Z_{tot} se place à une valeur proche de 36. Ces résultats sont encore plus intéressants si on considère que les auteurs des références citées ont essayé de reproduire, sans y arriver, leur données avec des codes de multifragmentation statistique. En particulier, ils ont utilisé deux codes: le code de fragmentation binaire séquentielle GEMINI [Cha88] et le code de multifragmentation simultanée de Gross [Gro90].

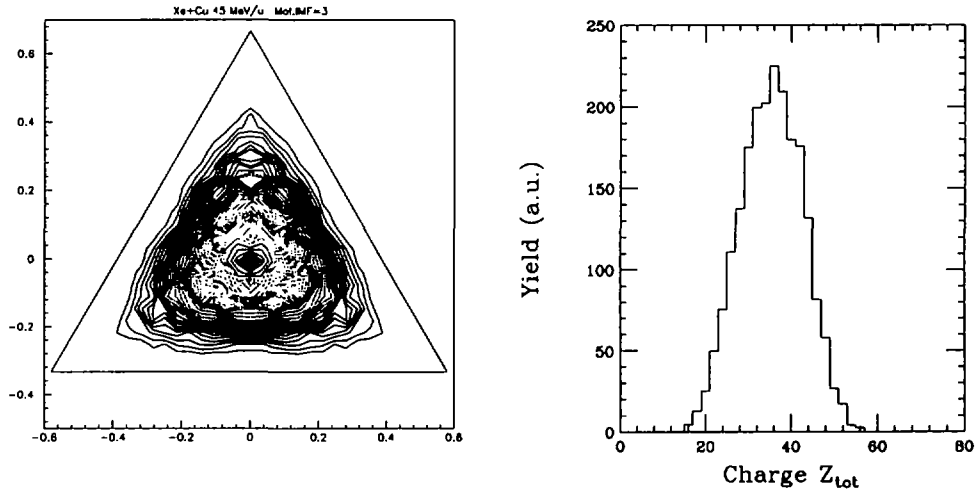


Figure 5.15: résultats expérimentaux pour les événements de multiplicité 3 de fragments de masse intermédiaire dans le cas de la réaction $Xe + Cu$ à $45 MeV/u$ [Bru92, Bru94]. A gauche, diagramme de Dalitz des trois fragments et, à droite, distribution de la somme des charges des trois fragments.

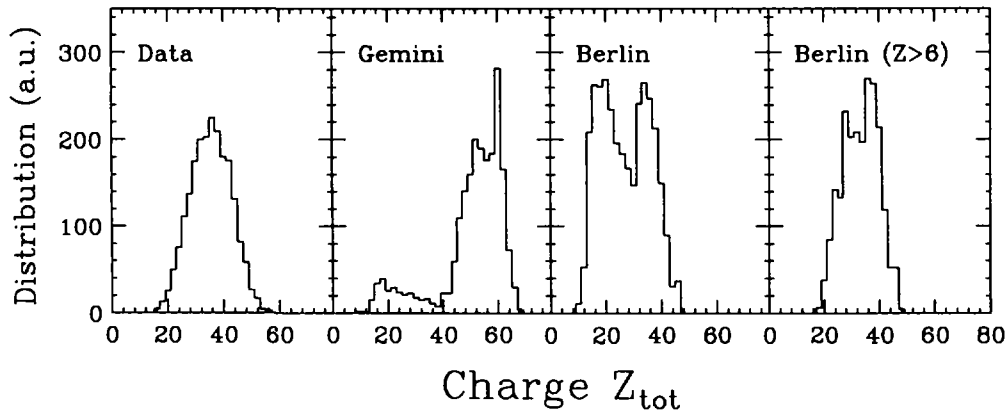


Figure 5.16: Comparaison [Bru94], pour ce qui concerne la somme des charges des trois fragments, des données expérimentales avec les résultats de deux modèles statistiques (Gemini, code de Berlin et code de Berlin dans lequel le fragments de charge plus petite ou égale à 5 ont été "éliminés").

5.5 La comparaison avec les données expérimentales

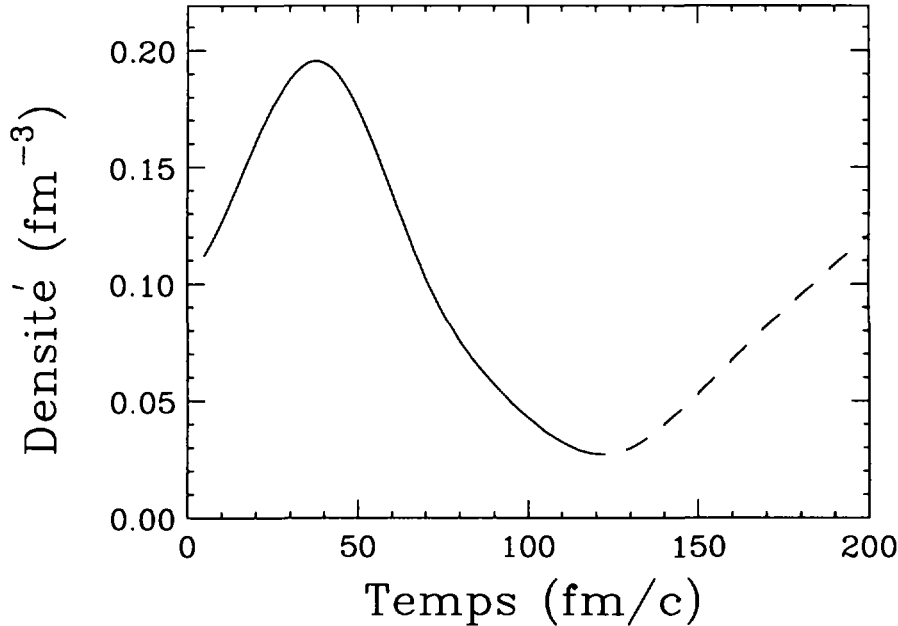


Figure 5.17: Evolution de la densité dans une sphère autour du centre de masse du système d'après un calcul de type BUU pour la réaction $Xe+Cu$ à 45 MeV/u . La partie en tiret indique que la dynamique dans cette région n'a pas de sens, car les fluctuations deviennent trop importantes pour être négligées.

La source à laquelle ils ont appliqué les deux codes est celle provenant d'un calcul BUU arrêté au moment auquel le système est thermalisé, mais il faut aussi remarquer qu'ils ont essayé d'autres sources (en particulier d'autres énergies d'excitation) et que le meilleur accord a été obtenu pour la source obtenue d'après le calcul BUU. La figure (5.16) (extraite de la réf. [Bru94]) montre les résultats de ces calculs comparés avec les données expérimentales, pour ce qui concerne la distribution de la somme des charges des trois fragments. Il est évident que les prédictions obtenues en couplant BUU avec GEMINI ne sont capables de reproduire ni la distribution de Z_{tot} (figure (5.16b)) ni le diagramme de Dalitz [Bru94]. Cela semble indiquer qu'un mécanisme de désexcitation binaire séquentielle n'est pas adapté pour reproduire le processus à l'origine de la production des fragments. Si nous nous intéressons maintenant aux prédictions du code de Berlin, nous observons un meilleur accord en ce qui concerne la symétrie de charges (dans le sens que les événements peuplent essentiellement le centre du diagramme de Dalitz [Bru94]), mais la distribution de Z_{tot} (figure (5.16c)) ne ressemble pas à la distribution expérimentale. En effet on voit l'apparition d'un deuxième maximum autour de $Z_{tot} = 15$, qui provient de la détection partielle d'événements de multiplicité grande. Le seul moyen d'obtenir pour cette observable un meilleur accord avec les données est de supprimer de façon arbitraire dans les événements les fragments avec $Z \leq 5$ (figure (5.16d)).

Pour essayer de comprendre ces résultats, nous avons donc effectué des simulations pour ce système. D'abord, nous avons effectué un calcul BUU sans fluctuations grâce à notre code **TWINGO**. Nous avons pu vérifier (voir la figure (5.17)) que le calcul prévoit que le système après approximativement 80 fm/c rentre dans la zone spinodale. Nous avons observé à ce moment-là l'existence d'une source unique quasi-sphérique avec les caractéristiques suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} A \approx 158 \\ Z \approx 70 \\ \rho \approx 0.06 \text{ fm}^{-3} \\ T \approx 3.2 \text{ MeV} \\ \beta_{exp}^{max} \approx 0.1 \end{array} \right.$$

où ρ est la densité moyenne de la source et β_{exp}^{max} est la vitesse d'expansion autosimilaire maximale à $R = 8.5 \text{ fm}$. Nous avons effectué 300 simulations de la décomposition spinodale de cette source en utilisant la méthode SIM (cf. §3.3.1). La figure (5.18) présente la multiplicité moyenne des fragments ainsi obtenus en fonction du temps. Comme nous l'avons déjà discuté la densité de seuil au-dessus de laquelle une région de l'espace est considérée occupée introduit une certaine ambiguïté sur la définition des fragments quand ils sont encore proches. Nous avons donc regardé à quel temps des différentes coupures, utilisées pour définir les fragments, donnent la même multiplicité. Cela est une indication que les fragments sont déjà assez éloignés pour que la configuration soit figée et que nous ayons le droit de définir la distribution en charge. En effet, nous pouvons observer que les multiplicités obtenues avec les différentes coupures convergent vers la même valeur à partir de 150 fm/c.

La figure (5.19) montre les distributions en charge des fragments primaires à 150 fm/c pour les différentes coupures. Nous pouvons remarquer que les différentes coupures introduisent une barre d'erreur dans la distribution (l'effet de la coupure étant de "définir" des fragments plus ou moins grands) mais, d'autre part, que les distributions en charge présentent toutes les caractéristiques déjà observées précédemment: manque de petits fragments, longue traîne, maximum autour de la charge 8-10.

Bien évidemment, les fragments formés sont encore chauds et il faut considérer leur désexcitation. Dans ce but, nous avons utilisé le code d'évaporation SIMON [Dur96b] développé par D.Durand, qui par rapport à GEMINI a l'avantage de permettre de suivre les trajectoires coulombiennes de tous les fragments. Cela était important pour pouvoir effectuer des comparaisons aussi sur des observables cinématiques. En particulier en utilisant la procédure décrite dans les références [Bru92, Bru94] nous avons étudié pour les événements à trois fragments:

1. - la quantité Y_{33} définie comme la déviation maximale des vitesses relatives

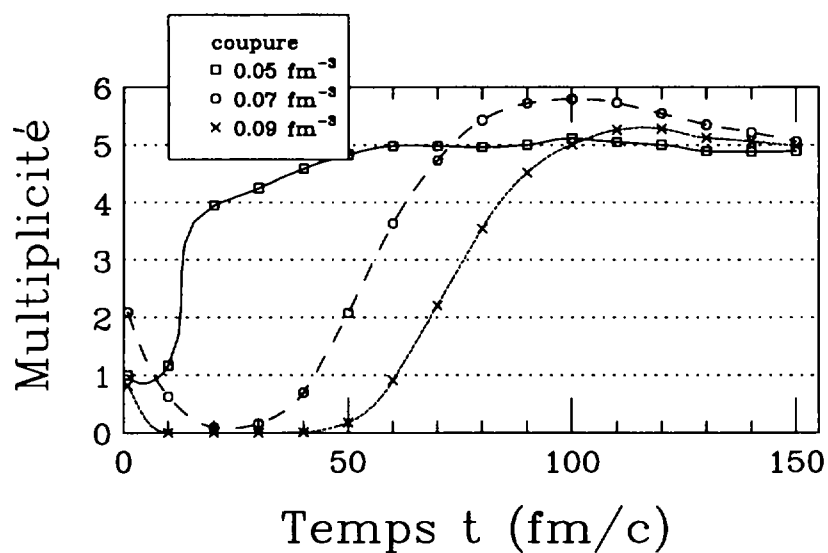


Figure 5.18: Nombre moyen de fragments en fonction du temps pour trois coupures différentes utilisées pour la détermination des fragments. Au temps final les trois multiplicités coïncident, en indiquant que la configuration des fragments est désormais figée.

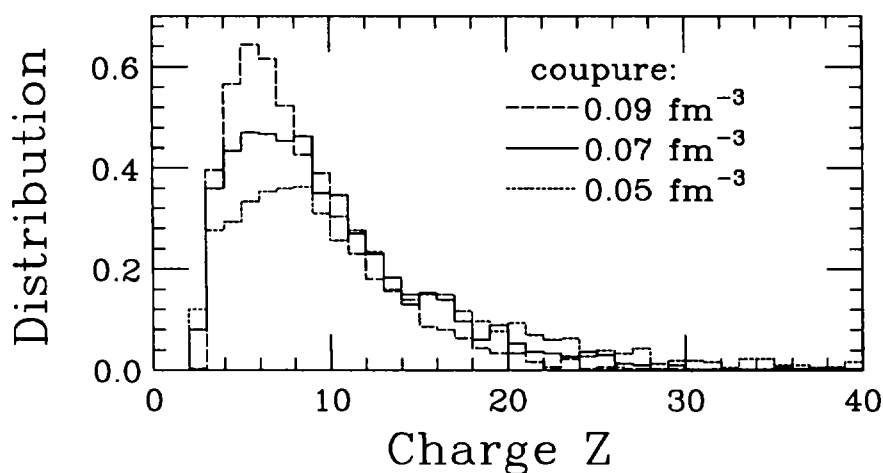


Figure 5.19: Distribution en charge des fragments au temps final pour les trois coupures considérées.

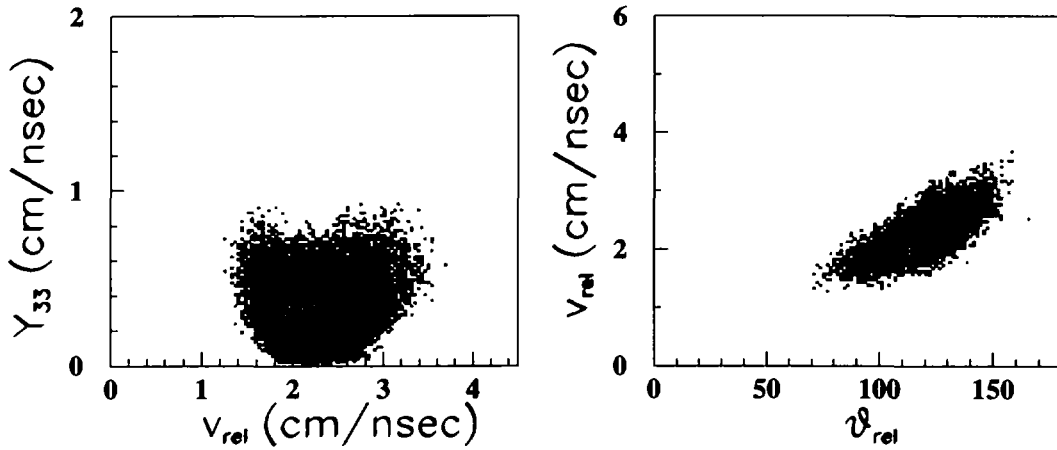


Figure 5.20: Caractéristiques cinématiques des trois fragments: à gauche, la corrélation entre la vitesse relative entre fragments et la variable Y_{33} définie dans le texte (voir équation 5.4); à droite la corrélation entre les vitesses relatives et les angles relatifs entre les trois fragments pour les événements les plus centraux. Expérimentalement les mêmes corrélations ont été observées.

par rapport à leur valeur moyenne

$$Y_{33} = \langle v_{rel} \rangle - v_{rel}^{min}; \quad (5.4)$$

2. - la corrélation entre l'angle relatif entre fragments et leur vitesse relative, dans la region du diagramme de Dalitz définie par la condition $Z_{min}/Z_{tot} > 0.26$, où Z_{min} est la charge la plus petite entre les trois et Z_{tot} est la somme des trois charges.

Dans les deux cas, l'accord est remarquable (voir figure (5.20)), ceci étant une indication que, d'un côté, les fragments détectés proviennent d'une source unique et, de l'autre, que le scénario plus probable pour expliquer leur production est celui de la multifragmentation simultanée de la source en trois fragments de masse similaire (voir dans la figure le maximum autour d'un angle relatif de 120 degrés et des faibles valeurs de Y_{33}).

Nous pouvons finalement passer à la comparaison des résultats concernant les caractéristiques des trois fragments. La figure (5.21) présente les diagrammes de Dalitz et la distribution de Z_{tot} dans les cas des données expérimentales et des résultats des nos simulations. L'accord est très bon et seulement la largeur de la distribution en Z_{tot} est légèrement sous-estimée. Cela peut être un effet lié aux fluctuations en taille et en température de la source initiale qui n'ont pas été prises en compte dans les simulations.

5.5 La comparaison avec les données expérimentales

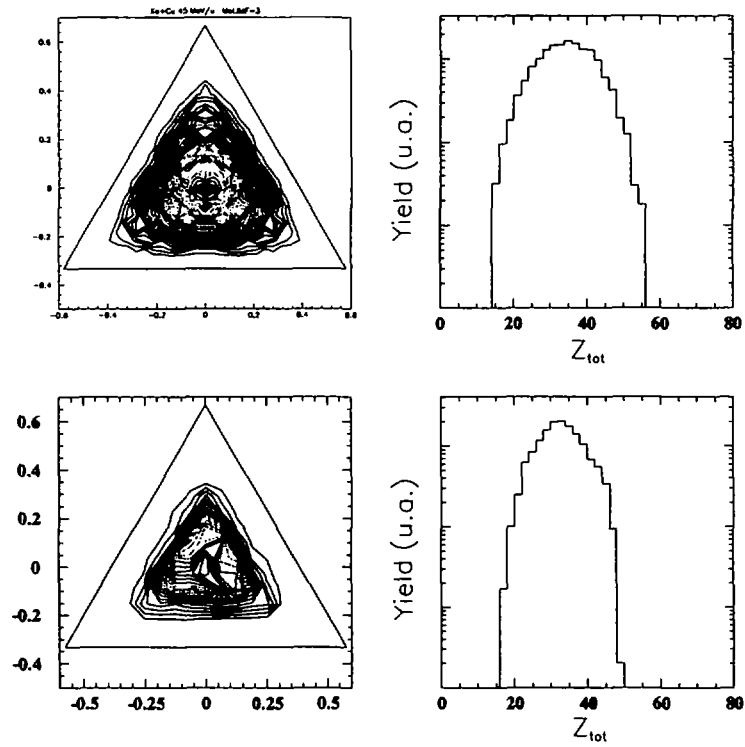


Figure 5.21: Comparaison des diagrammes de Dalitz et de la somme des charges des trois fragments entre les données expérimentales (en haut) et les résultats des nos simulations (en bas) pour la réaction $Xe + Cu$ à 45 MeV/u .

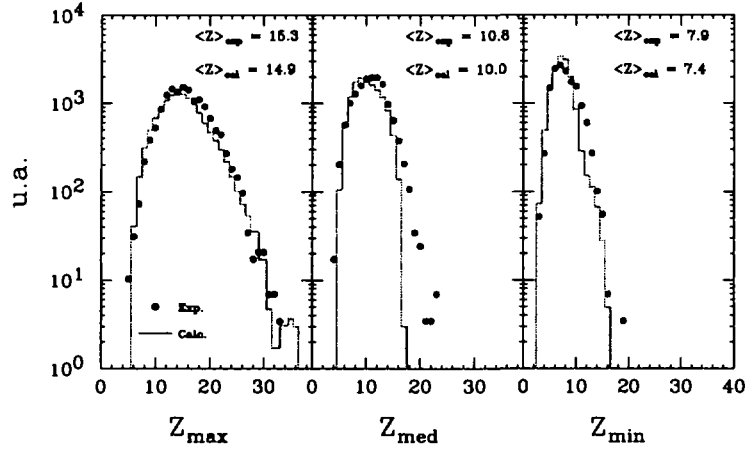


Figure 5.22: Comparaison des distributions en charge des trois fragments ordonnés pour la réaction $Xe + Cu$ à 45 MeV/u . Les points correspondent aux données expérimentales, les histogrammes aux résultats des simulations. Les valeurs moyennes sont aussi précisées.

La comparaison entre les données et les calculs peut être plus détaillée en regardant à la distribution de masse des trois fragments pris séparément (voir la figure (5.22)). Les prédictions théoriques arrivent à bien reproduire à la fois la forme, les valeurs moyennes, les maxima des distributions expérimentales.

Cet accord entre données et simulations est donc très prometteur. Pour tirer des conclusions définitives toutefois il faudra faire passer les résultats de nos simulations par le filtre expérimental. Il faut néanmoins remarquer que dans les résultats présentés ici une première sélection a été effectuée en considérant les IMF à partir de la charge 4, car l'efficacité de détection de Multics pour le charge 3 semble être plus faible.

5.5.2 La réaction $Xe + Sn$ à 50 MeV par nucléon

Récemment un nouveau multidétecteur très performant a été mis en service au GANIL: il s'agit du multidétecteur Indra. Large couverture angulaire, granularité élevée, seuils de détection faibles, bonne identification en charge sur une large gamme d'énergie sont les qualités de ce détecteur qui permet des analyses sur des événements dans lesquels plus de 80 % de la charge et de l'impulsion totales sont mesurées.

Nous avons donc entrepris une étude de la réaction $Xe + Sn$ à 50 MeV par

5.5 La comparaison avec les données expérimentales

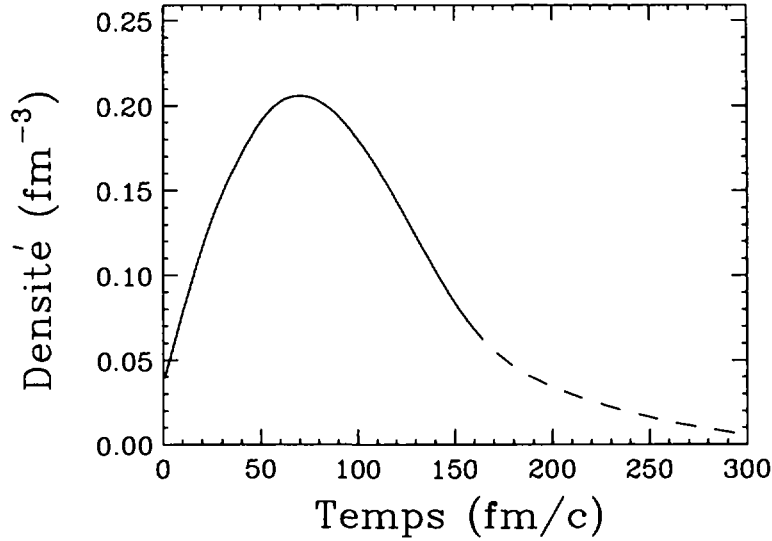


Figure 5.23: Evolution de la densité dans une sphère autour du centre de masse du système d'après un calcul de type BUU pour la réaction $Xe + Sn$ à 50 MeV/u . La partie en tiret indique que la dynamique dans cette region n'a pas de sens, car les fluctuations deviennent trop importantes pour être négligées.

nucléon, pour laquelle une analyse détaillée des événements les plus centraux a été menée par la collaboration Indra [Mar95].

Dans ce cas aussi, nous avons d'abord vérifié que le scénario de la décomposition spinodale est applicable, en regardant l'évolution de la densité dans une sphère autour du centre de masse du système (figure (5.23)) prédite par un calcul BUU. Nous avons pu vérifier qu'après 130-150 fm/c le système se trouve assez profondément dans la region spinodale. A ce moment-là les caractéristiques de la source observées dans la simulation sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \approx 210 \\ Z \approx 90 \\ \rho \approx 0.068 \text{ fm}^{-3} \\ T \approx 4.5 \text{ MeV} \\ \beta_{exp}^{max} \approx 0.1 \end{array} \right.$$

En effectuant 100 simulations de la décomposition spinodale de cette source nous avons obtenu la multiplicité moyenne et la distribution en charge primaire montrées sur la figure (5.24). Nous pouvons remarquer que la multiplicité moyenne se situe autour de 6 qui est la valeur rejointe asymptotiquement avec les différentes coupures et que la distribution en charge a toujours les caractéristiques attendues avec un maximum autour de la charge 8-10.

Le processus de désexcitation peut être maintenant pris en compte en appli-

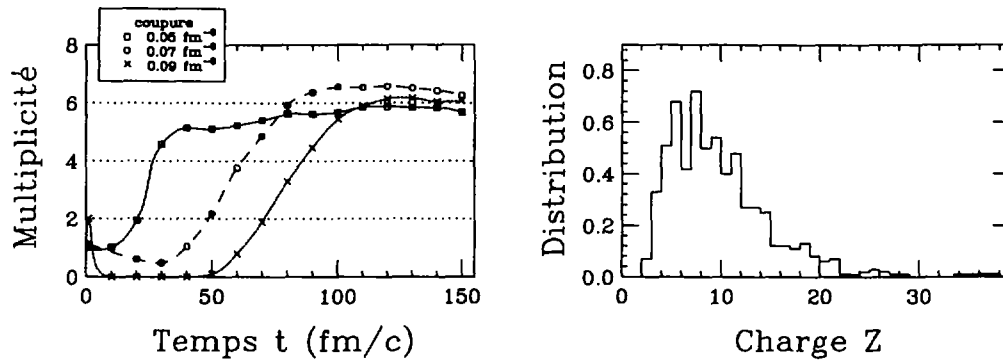


Figure 5.24: A gauche, le nombre moyen de fragments, pour des coupures différentes, dans le cas de la source considérée pour la réaction $Xe + Sn$ à 50 MeV/u. A droite, la distribution en charge obtenue dans le même cas avec la coupure à 0.07 fm^{-3} .

quant événement par événement le code SIMON aux fragments primaires chauds formés. La figure (5.25) (trait tireté) montre la distribution en charge finale ainsi obtenue. Sur la même figure sont présentées la distribution expérimentale (points) et la distribution qui est obtenue en effectuant sur les données "simulées" une sélection sur le moment de Fox et Wolfram d'ordre deux [Fox78] identique à celle utilisée dans l'expérience. Ce moment est défini événement par événement par

$$H(2) = \frac{1}{H(0)} \sum_{i,j}^{Z_{fmi}} |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| \left(\frac{3 \cos^2 \theta_{ij} - 1}{2} \right)$$

$$H(0) = \sum_{i,j}^{Z_{fmi}} |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j|$$

La somme est étendue à tous les fragments de masse intermédiaire Z_{fmi} ; \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j sont les impulsions des fragments i et j , dans le référentiel du centre de masse de la réaction. L'angle θ_{ij} est l'angle relatif entre les deux fragments. La variable $H(2)$ donne une mesure de la forme de l'événement et permet de sélectionner les événements dans lesquels les particules sont distribuées isotropiquement. Dans le cas idéal, un événement à deux sources donne une valeur de $H(2)$ égale à 1 tandis qu'un événement d'émission isotrope donne une valeur égale à zéro. La sélection expérimentale a été effectuée en utilisant la condition $H(2) \leq 0.1$. Nous pouvons remarquer (figure (5.25)) que l'effet de la sélection sur $H(2)$ est essentiellement d'enlever les fragments les plus gros, qui contribuent à donner une plus grande asymétrie aux événements.

L'accord entre les données expérimentales et les calculs (voir 5.25) est bon,

5.5 La comparaison avec les données expérimentales

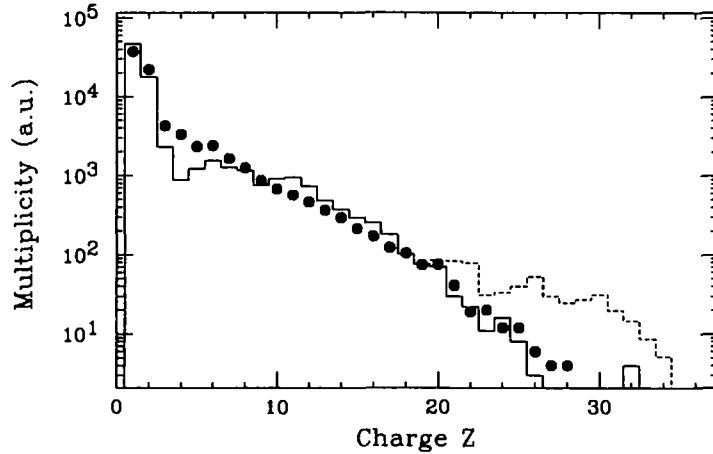


Figure 5.25: Distribution en charge associée aux événements centraux dans la réaction $Xe + Sn$ à 50 MeV/u . Les points correspondent aux données expérimentales [Mar95], les histogrammes aux résultats de nos simulations avant (en tiret) et après (en continu) avoir appliqué la même sélection sur $H(2)$ que dans les données expérimentales [Mar95].

la différence pour les charge entre $Z=3$ et $Z=6$ pouvant provenir de plusieurs sources: fluctuations en température et masse de la source non prises en compte dans les calculs mais aussi une contribution de particules de pre-équilibre dans la région de faibles masses.

Une analyse qui a été aussi faite concerne la forme des événements, en particulier s'ils sont sphériques ou plutôt aplatis. Cette analyse consiste à construire, pour chaque événement, avec les impulsions un ellipsoïde dont les trois axes ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) permettent de calculer deux variables appelées sphéricité et coplanarité définies par

$$s = \frac{3}{2}(1 - \lambda_1)$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

La corrélation entre les deux observables permet de définir la forme. En particulier dans le cas idéal le couple $(s, c) = (1, 0)$ définit une sphère, $(0, 0)$ un cigare et $(3/4, \sqrt{3}/4)$ un disque. La figure (5.26) montre la comparaison entre les données et les simulations: pour les événements sélectionnés ($H(2) \leq 0.1$) les deux donnent une forme sphérique de la source. On peut toutefois noter une légère différence entre les données et le calcul qui pourrait indiquer un forme pas totalement sphérique pour les événement expérimentaux.

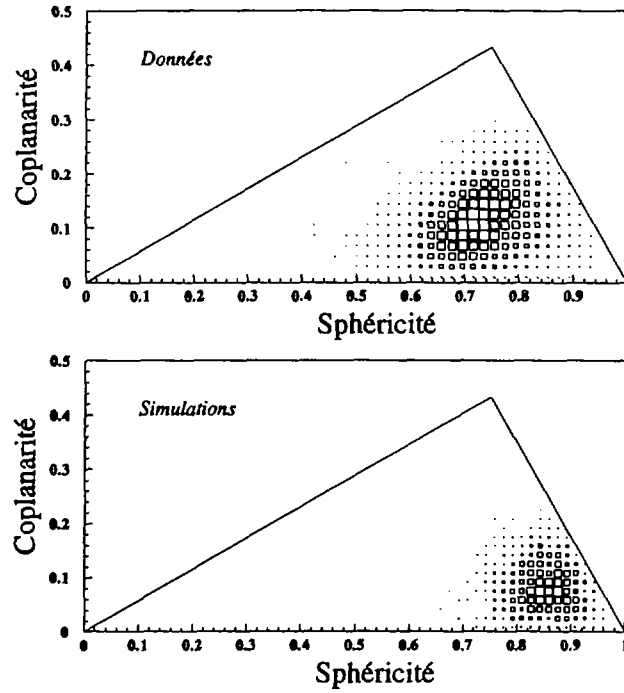


Figure 5.26: Comparaison entre les données expérimentales (en haut) et les simulations (en bas) des caractéristiques liées à la forme des événements. Dans les deux cas la région correspondant à des formes sphériques est peuplée.

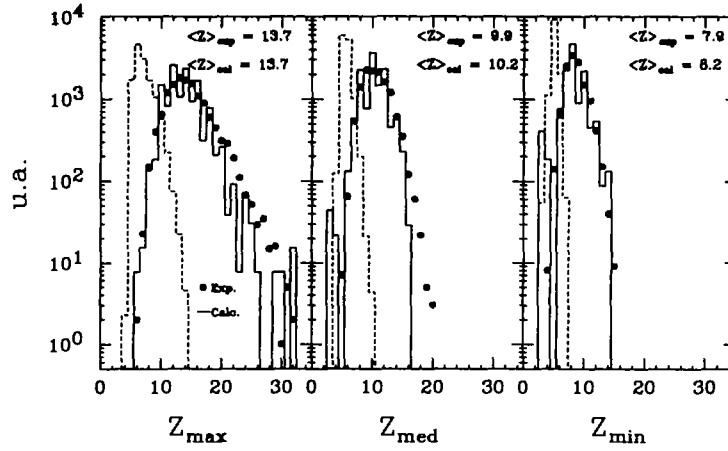


Figure 5.27: Comparaison des distributions en charge des trois fragments ordonnés pour les événements centraux de la réaction $Xe + Sn$ à 50 MeV/u . Les points correspondent aux données expérimentales, les histogrammes (continus) aux résultats de nos simulations. Les valeurs moyennes sont aussi précisées. Pour comparaison les distributions obtenues avec le modèle de Gross, pour une source avec les mêmes caractéristiques et la même énergie d'excitation, sont montrées (histogramme en tiret).

5.5 La comparaison avec les données expérimentales

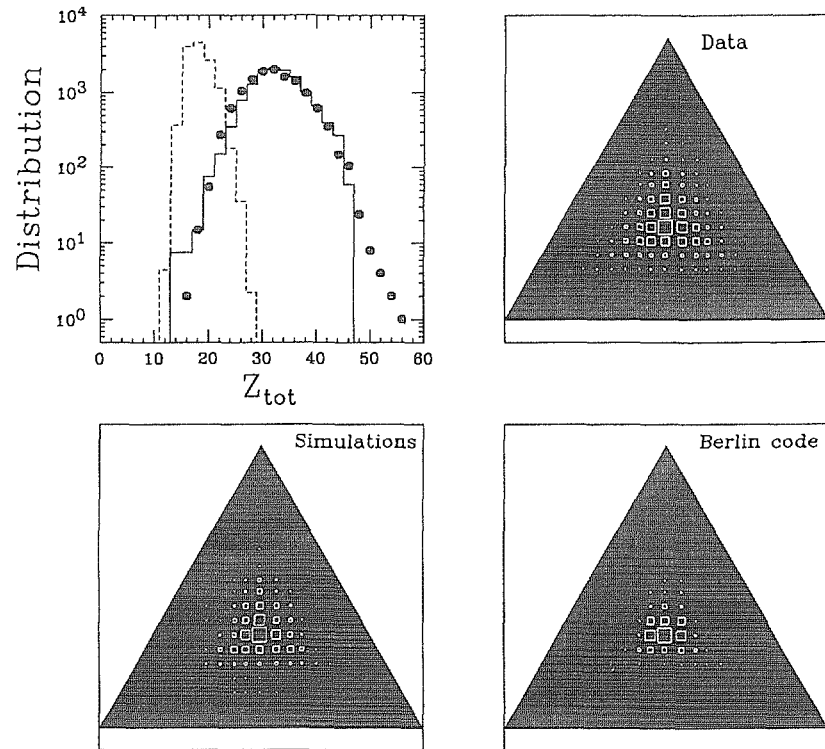


Figure 5.28: Comparaison des diagrammes de Dalitz et de la distribution de la somme des charge des trois fragments les plus gros pour les événements centraux de la réaction $Xe+Sn$ à 50 MeV/u entre les données expérimentales, les résultats de nos simulations (histogramme continu) et les résultats du modèle de Gross (histogramme en tiret).

Finalement, nous avons étudié les trois fragments les plus gros de chaque événement. La figure (5.27) présente cette comparaison. Dans ce cas aussi les simulations (trait continu) arrivent à bien reproduire les données (points). Il est ici intéressant de comparer ces résultats avec ceux d'un modèle statistique. Nous avons effectué des calculs avec le code de Berlin pour la même source utilisée dans nos simulations. Les résultats sont montrés aussi sur la figure (5.27). Il est clair que ce code surestime la production de petits fragments. Cet effet est encore plus claire sur la figure (5.28) dans laquelle est montré la distribution Z_{tot} de la somme des trois charges les plus gros obtenue expérimentalement (points), avec nos simulation de champ moyen stochastique (trait continue) et avec le code de Berlin (trait tireté) aussi bien que les diagrammes de Dalitz pour les trois cas. Même si les deux types de simulations arrivent à bien reproduire la symétrie des charge seulement les simulations stochastiques de champ moyen arrivent à donner la bonne allure de la distribution de Z_{tot} . Pour améliorer l'accord entre les prédictions d'un modèle statistique et les données il faudrait artificiellement abaisser l'énergie d'excitation du système.

Une dernière comparaison qui a été effectuée avec les données concerne la distribution en charge de l'énergie moyenne des fragments (voir la partie en haut de la figure (5.29)). Nous pouvons remarquer que la forme de la distribution est bien reproduite avec une croissance linéaire de l'énergie moyenne avec la charge jusqu'à $Z \approx 15$, suivie d'une chute pour les charges les plus grandes. Cet effet très net est dans nos simulations dû au fait que le champ moyen ralentit d'avantage les fragments les plus gros. La reproduction de l'allure des distributions en vitesse est un argument en faveur du scénario de la décomposition spinodale, mais toutefois il faut remarquer que les valeurs des énergies moyennes sont sous-estimées par nos simulations. Ceci est sans doute due à une trop faible vitesse d'expansion de la source considérée.

En effet, nous avons observé (voir les profiles de densité en fonction du temps dans la partie basse de la figure (5.29)) que l'expansion des fragments est reliée de façon non linéaire à la vitesse d'expansion auto-similaire de la source initiale. Une légère augmentation donc de cette quantité (d'ailleurs dans les barres d'erreur de l'estimation obtenue d'après le calcul BUU) devrait améliorer l'accord entre nos simulations et les données expérimentales sur les énergies moyennes des fragments.

Nous venons de voir que, dans le cas des collisions centrales autour de 50 MeV/u les approches stochastiques mettant en jeu des instabilités spinodales sont capables de bien reproduire les données expérimentales. Mais qu'en est-il pour d'autres paramètres d'impact.

5.5 La comparaison avec les données expérimentales

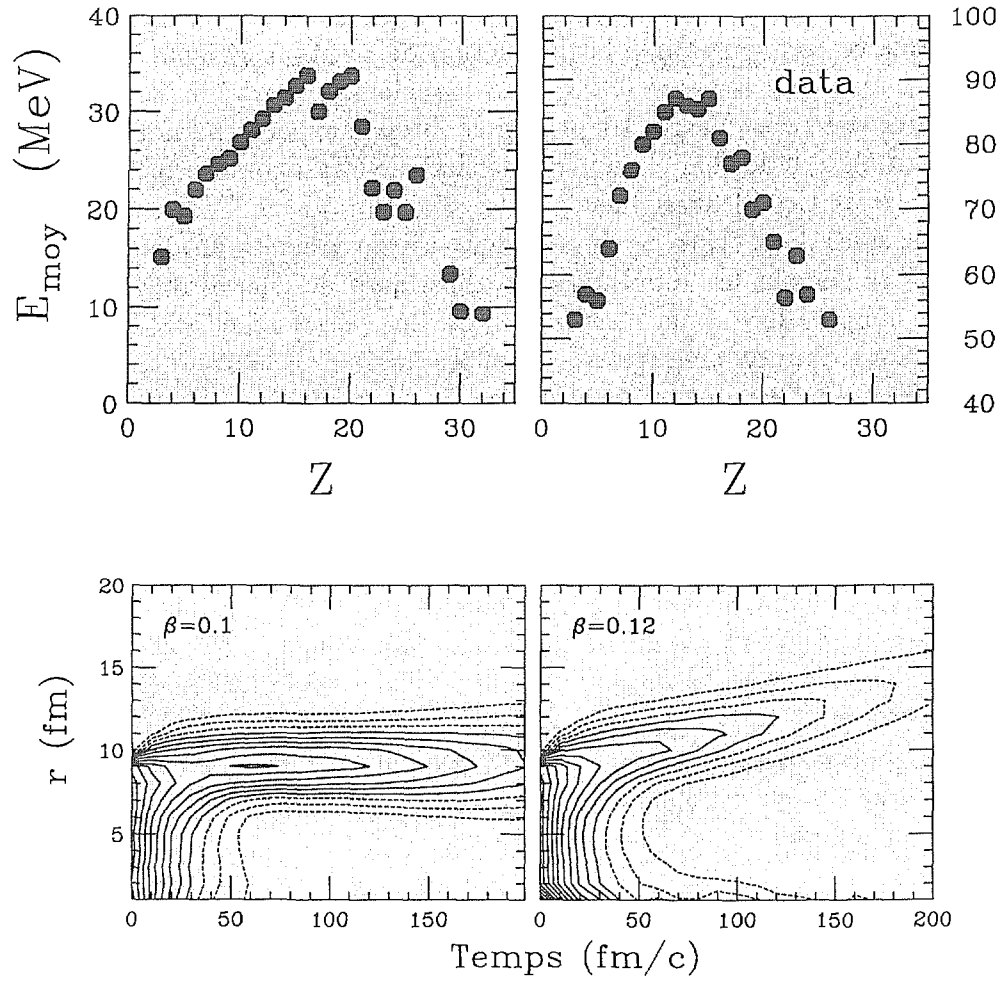


Figure 5.29: Partie haute: Comparaison de la distribution en charge de l'énergie moyenne entre les données expérimentales (à droite) et les résultats de nos simulations (à gauche). Partie basse: Evolution temporelle du profil de densité pour deux vitesses d'expansion différentes de la source initiale.

5.6 Instabilités de col

Des résultats expérimentaux récents [Stu92, Lec95, Mon94, Tök95, Lyn95, Ben95, Luk96] ont attiré l'attention sur la possibilité d'observer la production de fragments de masse intermédiaire aussi dans des collisions semi-périphériques, pour lesquelles le scénario d'une violente explosion nucléaire ne semble pas s'appliquer à cause du fait que, le paramètre d'impact étant grand, la dissipation d'énergie n'est pas suffisante. Dans cette partie nous essayerons de comprendre les mécanismes responsables de ces observations, qui représentent la ligne de séparation entre les événements de transfert profondément inélastique et les événements de multifragmentation.

En particulier, nous avons étudié la dynamique de la zone de superposition des noyaux (couramment appelée le "col"), pour une vaste gamme d'énergies et de paramètres d'impact, en essayant de détecter des mécanismes liés à la présence d'instabilités (éventuellement de type spinodal). Le but étant d'observer des comportements instables, nous avons utilisé la méthode TNT.

5.6.1 Instabilités et dynamique

Nous voulons donc étudier les collisions semi-périphériques entre ions lourds dans lesquelles deux ou plusieurs sources primaires sont formées. Les événements binaires pour des collisions non centrales à basse énergie sont simplement liés aux effets coulombiens et de rotation qui empêchent la formation d'une source unique. Cela se passe sur des temps assez longs. La physique de ces processus est assez bien comprise sur la base de l'échange des nucléons entre les deux noyaux à travers la région de superposition [Ran82, Ran87]. Dans certains cas, comme dans la fission, des instabilités de forme peuvent apparaître, conduisant à la cassure en deux ou trois fragments.

En augmentant l'énergie, on observe d'un côté une diminution des temps d'interaction et de l'autre la formation, dans la région du col, de régions à haute densité. Ces régions peuvent, dans la phase suivante d'expansion, rejoindre des valeurs critiques de la densité et se casser en plusieurs morceaux [Ber78]. Le fait d'atteindre des densités basses (éventuellement dans la région spinodale) peut conduire le système à montrer des comportements typiques de la matière nucléaire instable. En particulier, nous avons déjà vu comment, en présence d'instabilités, les fluctuations jouent un rôle très important. En effet, l'amplification des fluctuations peut conduire le système considéré vers des chemins très éloignés de la trajectoire moyenne. Cela peut avoir comme conséquences importantes une très forte augmentation des variances de toutes les observables associées à la quasi-cible et au quasi-projectile par rapport à celles reliées aux fluctuations à l'équilibre, notamment celles dues à l'échange de nucléons entre les deux noyaux.

5.6 Instabilités de col

De plus, ce processus peut être accompagné d'une émission de fragments dans la région du col.

Un paramètre extrêmement important est le temps pendant lequel le système reste en interaction. Si ce temps, qui dépend essentiellement du paramètre d'impact considéré et de l'énergie du faisceau, est long par rapport aux temps typiques de retour vers l'équilibre, nous nous attendons à observer seulement des fluctuations d'équilibre dues à la nature stochastique de l'échange de nucléons entre les deux partenaires de la réaction et/ou aux collisions entre nucléons dans un système stable. C'est ce qui se passe pour les collisions profondément inélastiques à basse énergie, au-dessous de 10 MeV par nucléon.

Du côté opposé, si ce temps est très court, le système n'aura pas la possibilité de s'équilibrer ou de développer des instabilités; dans ce cas aussi, les seules fluctuations qui peuvent se manifester sont celles liées aux fluctuations statistiques des processus dynamiques. C'est ici le cas des réactions du type participant-spectateur pour des énergies autour de 100 MeV par nucléon.

A des énergies intermédiaires (entre 15 et 70 MeV par nucléons) nous nous attendons à observer des phénomènes différents. Pour ces énergies, en effet, le temps d'interaction est de l'ordre des temps de croissance des instabilités et donc les instabilités seront amplifiées, conduisant à des grandes variances pour toutes les observables liées aux fragments primaires de la réaction. Cela est en effet très intéressant d'autant plus qu'assez récemment la présence de grosses variances dans la distribution en charge du quasi-projectile et de la quasi-cible aussi bien que l'émission de fragments de masse intermédiaire dans la région du col ont été expérimentalement rapportés [Stu92, Lec95, Mon94, Tök95, Lyn95, Ben95, Luk96].

Puisque nous sommes en train d'étudier un système dans lequel les fluctuations jouent un rôle très important, nous sommes obligés d'utiliser une approche de type stochastique. Pour obtenir les résultats qui seront montrés dans la suite, nous avons utilisé la méthode d'introduction du bruit que nous avons introduite au paragraphe 3.3.1, la méthode TNT. Nous utilisons donc le bruit associé au fait d'échantillonner l'espace des phases avec un nombre fini de particules test. Nous avons utilisé dans ces calculs 50 particules test par nucléon. Ce nombre permet d'un côté de reproduire la dynamique moyenne dans des situations stables et, de l'autre, introduit des fluctuations dont l'amplitude est de l'ordre de grandeur prévu pour la région de densités et températures que le système est en train d'explorer. Cette méthode doit être considérée comme très qualitative.

Toutefois il faut noter que, dans les calculs que nous avons effectués, nous sommes intéressés à la possibilité de mettre en évidence des situations d'instabilité et non pas de donner une description complète de la dynamique; donc l'amplitude des fluctuations n'est pas d'importance extrême. Il est évident que, dès qu'on veut être plus quantitatifs et, par exemple, faire des comparaisons avec des données

expérimentales, une prise en compte plus détaillée des fluctuations à introduire est nécessaire. Une fois les caractéristiques des instabilités déterminées, une méthode du type BOB devrait être très bien adaptée.

5.6.2 Les résultats des simulations

Nous avons donc étudié la réaction $^{60}\text{Ni} + ^{90}\text{Zr}$ pour des valeurs différentes de l'énergie du faisceau et pour un paramètre d'impact réduit $b/b_{\text{max}} = 0.5$ et la réaction $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Zr}$ à 15 MeV par nucléon pour différents paramètres d'impact. Toutes les simulations ont été effectuées avec la paramétrisation du potentiel déjà introduite au paragraphe 3.2.

Pour étudier le développement des fluctuations, nous avons "généralisé" plusieurs événements avec les mêmes conditions macroscopiques, mais un échantillonnage différent de l'espace des phases. La figure (5.30) montre les contours de densité sur le plan de réaction pour trois événements différents (chaque ligne correspondant à un événement) autour du temps de séparation pour la réaction $^{60}\text{Ni} + ^{90}\text{Zr}$ à 15 MeV/u (a), 40 MeV/u (b) et 80 MeV/u (c).

Il est possible d'observer, dans les trois cas, un comportement différent dans la région du col. A basse énergie, nous avons une réaction binaire, comme dans les collisions profondément inélastiques. A 40 MeV/u, nous observons le développement de différentes configurations dans la région de la superposition correspondantes à des fortes fluctuations et la possibilité de former des fragments dans la région du col. A haute énergie, nous avons une explosion du type "boule de feu".

La variance de la densité

Pour effectuer une analyse plus précise, nous avons étudié les valeurs moyennes et les variances associées à différentes observables. La figure (5.31) montre l'évolution temporelle de la densité moyenne (cercles) et de la variance sur la densité (carrés) définie par

$$\sigma_{\rho}^2(t) = \frac{1}{N_{ev}} \sum_{i=1}^{N_{ev}} (\rho_i(t) - \bar{\rho}(t))^2$$

calculées dans une sphère de rayon 2 fm autour du centre de masse pour la réaction $\text{Ni} + \text{Zr}$ à 15 MeV/u. Nous pouvons remarquer que la variance oscille avec une tendance à grandir, surtout à partir du moment auquel le système tombe dans la région instable (entre 220 et 300 fm/c). Cette croissance affectera les largeurs des observables associés au quasi-projectile et à la quasi-cible, comme on verra plus en détail dans la suite.

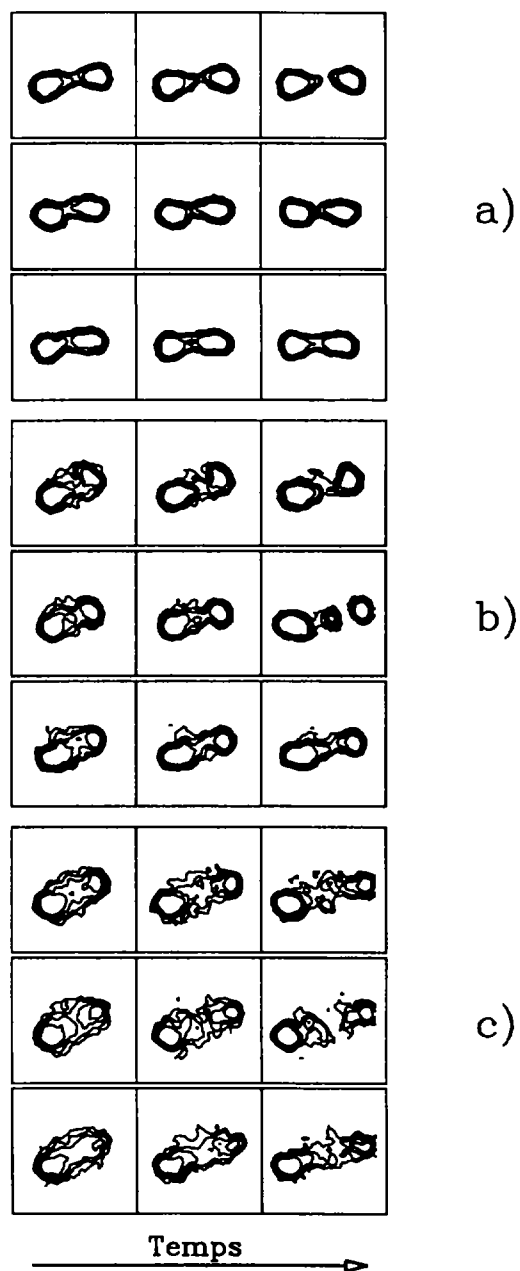


Figure 5.30: Contours de densité sur le plan de réaction pour la réaction $Ni+Zr$ pour un paramètre d'impact réduit $b/b_{max} = 0.5$. Trois événements différents sont montrés pour la réaction à: 15 MeV/u à $t=280, 300, 320$ fm/c (a); 40 MeV/u à $t=120, 140, 160$ fm/c (b); 80 MeV/u à $t=80, 100, 120$ fm/c (c).

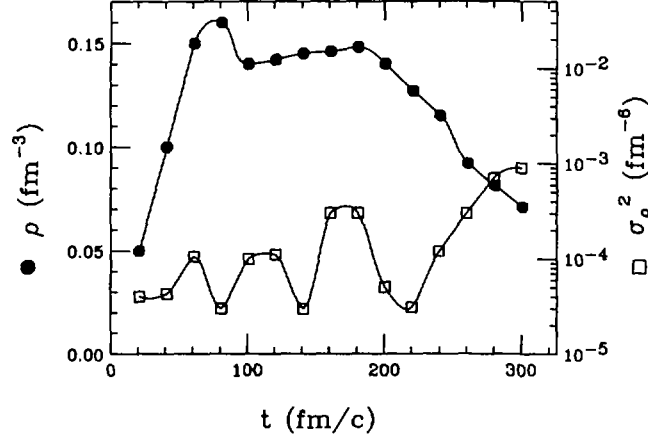


Figure 5.31: Evolution temporelle de la densité (cercles) et de la variance associée (carrés) calculées pour une sphère de 2 fm dans la région de superposition, pour la réaction $Ni + Zr$ à 15 MeV/u.

Nous avons effectué la même analyse pour la même réaction à 40 MeV/u. La figure (5.32) (en haut) montre l'évolution de la densité moyenne et de la variance dans une sphère de 3 fm autour du centre de masse du système. Dans ce cas, nous pouvons observer une croissance exponentielle de la variance à partir de 120 fm/c, associé à l'entrée du système dans la région spinodale. Pour avoir aussi une idée du comportement des observables liées à la forme, nous avons étudié, pour la même réaction, l'évolution du moment octupolaire de la densité, calculé le long de l'axe d'élongation maximale en rotation. Nous avons considéré le moment octupolaire

$$\mathcal{O}(t) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \frac{\sum_i (5z_i^3 - 3z_i r_i^2)}{N_{tot}}$$

où la somme est calculée sur les N_{tot} particules test qui font partie du système di-nucléaire, et z_i et r_i sont calculés par rapport au référentiel tournant dans lequel l'axe d'élongation maximale correspond à l'axe z . Cette quantité est liée aux fluctuations dans le rapport des masses des deux fragments plus gros qui sont formés dans la réaction (voir la figure (5.30b)). La figure (5.32) montre l'évolution de la valeur moyenne de \mathcal{O} (cercles) et de sa variance (carrés). Nous pouvons observer une croissance exponentielle de la variance à partir de 100-120 fm/c jusqu'à 180 fm/c, tandis qu'au même temps la valeur moyenne de \mathcal{O} reste presque constante.

Finalement la figure (5.33) montre l'évolution de la densité moyenne et de la variance associée pour la réaction à 80 MeV/u. Dans ce cas bien que la densité moyenne arrive à rentrer dans la région spinodale, la dynamique est trop rapide, les fluctuations n'ont pas le temps de se développer et la variance n'a pas le temps

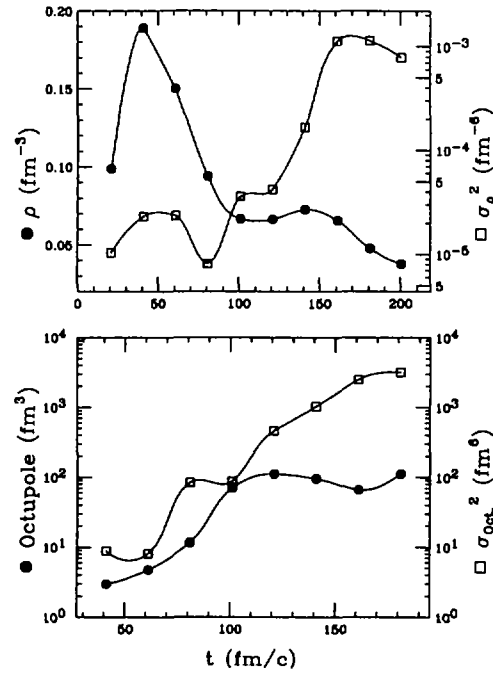


Figure 5.32: Partie haute: Evolution temporelle de la densité (cercles) et de la variance associée (carrés) pour la réaction $Ni + Zr$ à 40 MeV/u. Partie basse: Evolution temporelle du moment d'octupole de la densité (cercles) et de la variance associée (carrés) pour la même réaction.

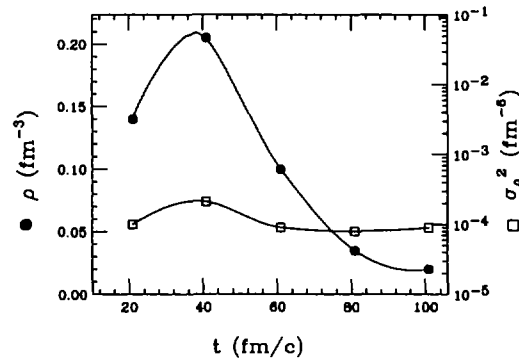


Figure 5.33: Evolution temporelle de la densité (cercles) et de la variance associée (carrés) pour la réaction $Ni + Zr$ à 80 MeV/u.

de croître.

La variance de la masse

Une des caractéristiques importantes et accessibles du point de vue expérimental des collisions semi-périphériques est la largeur des distributions en masse de la quasi-cible et du quasi-projectile. Nous pouvons essayer de mettre en relation la valeur de cette observable avec la présence d'instabilités.

En effet, si le système est stable, la valeur d'équilibre de la variance de la masse, dans un modèle qui arrive à bien reproduire les données expérimentales à basse énergie [Ran82, Ran87], est simplement reliée au nombre moyen de nucléons échangés entre les deux partenaires de la réaction \bar{n}_{ech} par la relation:

$$\sigma_A^2 = \bar{n}_{ech}. \quad (5.5)$$

Dans un calcul de type BUU qui utilise N_{pt} particules test par nucléon on observe aussi des fluctuations dues à l'échange des particules test, mais cette valeur doit être renormalisée au nombre de particules test, c'est-à-dire que dans une situation stable la variance est donnée par

$$\tilde{\sigma}_A^2 = \frac{\bar{n}_{ech}}{N_{pt}}. \quad (5.6)$$

Nous avons donc comparé les valeurs de la variance obtenues sur un ensemble d'événements en considérant les fluctuations en masse du quasi-projectile avec la valeur obtenue en considérant la relation 5.6 (donc en calculant le nombre moyen de nucléons échangés), opportunément remultipliée par N_{pt} . Si nous ne sommes pas en présence d'instabilités les deux valeurs coïncident, tandis qu'en présence d'instabilités les deux valeurs diffèrent fortement. Le tableau 5.1 montre cette comparaison pour la réaction $Ni + Zr$ aux différentes énergies considérées.

E/A (MeV/u)	σ_A^2	
	simulation	équilibre
15	15.	0.41
40	32.	0.22
80	0.3	0.28

Tableau 5.1: Variances dans la masse du quasi-projectile pour la réaction $Ni + Zr$ pour le paramètre réduit $b/b_{max} = 0.5$ aux différentes énergies.

Nous pouvons observer que déjà à 15 MeV/u la variance obtenue dans les simulations est plus grande que celle prévue "à l'équilibre". Ceci est une indication que des instabilités sont déjà présentes, en accord avec les résultats obtenus

5.6 Instabilités de col

pour l'évolution de la variance présentés au paragraphe précédent. Dans le cas de la réaction à 40 MeV/u nous pouvons observer que la différence entre la valeur à l'équilibre et la valeur obtenue d'après les simulations est encore plus grande. L'effet est une croissance des variances de la masse du quasi-projectile et de la quasi-cible et, comme nous avons vu, la possibilité de produire des fragments dans la région du col. Finalement, à 80 MeV/u, la variance en masse converge vers la valeur attendue à l'équilibre.

Il faut remarquer que, comme nous avons vu au paragraphe précédent, un rôle-clef est joué par le temps d'interaction. En effet, pour les réactions à 15 et 40 MeV/u, pour lesquelles les temps d'interaction sont comparables avec le temps de croissance des instabilités (qui, nous le rappelons, sont de l'ordre de 40-60 fm/c), le système montre la présence des instabilités, tandis que pour la réaction à 80 MeV/u, pour laquelle le temps d'interaction est plus court que le temps d'instabilité, le système n'arrive pas à amplifier les fluctuations.

Une analyse similaire à celle qu'on vient de montrer peut être effectuée en laissant constante l'énergie de la réaction et en faisant varier le paramètre d'impact. Dans ce cas, en effet, les collisions plus centrales induisent une plus grande dissipation d'énergie et donc des temps d'interaction plus longs. Nous avons donc considéré le système $Ni+Ni$ à 15 MeV/u pour des différents paramètres d'impact. Le tableau 5.2 montre les résultats de la comparaison des variances dans la masse du quasi-projectile avec les valeurs prévues en absence d'instabilités.

b (fm)	σ_A^2	
	simulation	équilibre
3	0.5	0.50
6	9.8	0.37
7	10.8	0.29
9	0.2	0.17

Tableau 5.2: Variances dans la masse du quasi-projectile pour la réaction $Ni + Ni$ pour l'énergie $E/A = 15$ MeV/u à différents paramètres d'impact.

Les fluctuations d'équilibre de type statistique sont obtenues pour les collisions les plus centrales ($b=3$ fm), pour lesquelles il y a fusion et pour lesquelles la variance a été calculée en considérant le nombre moyen de nucléons évaporés. Pour les collisions semi-périphériques ($b=6$ et $b=7$ fm), nous avons l'augmentation attendue de la variance. Finalement, pour les collisions les plus périphériques ($b=9$ fm) la variance revient à sa valeur à l'équilibre, car dans ce cas les fluctuations n'ont pas le temps de se développer. Une remarque importante à faire est que les variances que nous avons obtenues ne peuvent pas être confrontées aux données

expérimentales. Pour cela un contrôle des fluctuations introduites dans la dynamique est nécessaire, ce qui était au-dehors des buts de ce travail, comme nous avons déjà pu voir au début du paragraphe 5.6.

En conclusion, nous avons vu que les instabilités de champ moyen peuvent avoir un rôle important aussi dans la dynamique des collisions semi-périphériques, avec des effets plutôt grands sur les largeurs de toutes les observables physiques jusqu'à la possibilité de formation de fragments primaires de masse intermédiaire dans la région du col. La région physique pour la meilleure observation de ces phénomènes devrait être la gamme d'énergies entre 20 et 70 MeV/u.

Chapitre 6

Conclusions

Le but de cette thèse a été double: d'un côté, il y avait le développement de méthodes stochastiques pour l'étude réaliste (en trois dimensions) des problèmes à N corps, de l'autre l'application de ces méthodes à la description de la multi-fragmentation nucléaire en termes de décomposition spinodale. Finalement, nous voulions confronter ces nouvelles théories avec l'expérience.

Pour ce qui concerne le premier point, il s'agissait de tenter d'améliorer les approches de champ moyen à un corps, qui, bien que capables de donner des bons résultats dans des situations "stables" dans lesquelles corrélations et fluctuations ne jouent pas un rôle déterminant, ne peuvent pas être appliquées là où instabilités, bifurcations, brisures de symétrie, chaos sont présents. Un cas typique dans lequel fluctuations et corrélations sont essentielles est celui de la multi-fragmentation par décomposition spinodale; dans ce cas, en effet, le passage du système dans une région d'instabilité fait que toutes petites fluctuations peuvent devenir déterminantes pour la dynamique. Il a été proposé [Ayi88, Ayi90, Ran90] donc de compenser les lacunes des approches de champ moyen en introduisant une nouvelle équation du transport stochastique, en analogie avec la description du mouvement brownien. Il s'agit de l'équation de Boltzmann-Langevin dans laquelle un terme supplémentaire est ajouté à l'équation de champ moyen de Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck. Ce terme supplémentaire, qui simule l'effet de toutes les corrélations non prises en compte dans le terme de collision de l'équation BUU, est considéré comme un terme stochastique qui agit comme une force de Langevin sur la fonction de distribution à un corps $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. En fait, dans ce cas, nous n'avons plus à considérer une seule fonction de distribution mais un ensemble statistique de fonctions de distribution. L'utilisation pratique de ces approches s'était limitée, à cause des problèmes liés à la résolution exacte de l'équation de Boltzmann-Langevin, à des cas modèles à deux dimensions.

Ce travail de thèse constitue l'une des premières applications d'un calcul de champ moyen stochastique au cas tridimensionnel d'un noyau plongé dans la

Conclusions

région d'instabilité de volume. Pour parvenir à ce but nous avons écrit *ex novo* un code de type BUU très performant pour ce qui concerne rapidité et fiabilité: le code **TWINGO** (cf. §3.2). Toutefois l'introduction du terme fluctuant de Boltzmann-Langevin n'étant pas possible à 3 dimension nous avons développé deux approches stochastiques différentes: la première, que nous avons appelée **SIM** (cf. §3.3.1), consiste à introduire des fluctuations dans les conditions initiales du système, pourvu qu'il se trouve dans la région instable; la deuxième (**BOB**, §3.3.2), inspirée directement du mouvement brownien, permet de suivre dynamiquement le système et de régler localement la présence et l'amplitude des fluctuations. Cette deuxième méthode est bien évidemment plus puissante, car elle peut être appliquée dans des situations plus générales; néanmoins nous avons montré que les deux méthodes donnent les mêmes résultats, quand elles sont utilisées dans des conditions similaires pour des sources dans la région d'instabilité spinodale (cf. §5.4). Dans ces différentes approches, nous avons utilisé la théorie de la réponse linéaire, afin de déterminer l'amplitude des fluctuations à introduire dans la dynamique, en projetant le terme de bruit de la théorie de Boltzmann-Langevin sur les modes les plus instables prédits par la théorie de la réponse linéaire (cf. §2.10.1).

Ces théories stochastiques n'ayant jamais été employées pour décrire des transitions de phase du premier ordre, un test important que nous avons effectué concerne la comparaison des résultats des simulations stochastiques avec ceux d'une simulation exacte dans le cas d'un gaz classique (cf. §4.1). Nous avons pu observer que la dynamique du processus de fragmentation montre la même évolution dans les deux cas, même quand le système montre des fortes corrélations à plusieurs corps. Ainsi, nous avons pu conclure que les approches stochastiques sont bien capables de décrire la dynamique d'une transition de phase du premier ordre.

Sur la base de ces résultats, le deuxième point, concernant l'étude de la décomposition spinodale d'un noyau, pouvait donc être abordé. Il est connu [Gun83] que la décomposition spinodale de systèmes classiques, comme les alliages binaires, pour lesquels le temps de la séparation des phases est compatible avec l'observation expérimentale, se déroule avec des échelles temporelles et spatiales typiques des interactions entre les constituants. L'idée sous-jacente à ce travail de thèse est que dans le cas nucléaire aussi, si le scénario de la multifragmentation par décomposition spinodale s'applique, il sera possible d'observer des échelles en temps et en taille de fragments typiques des interactions nucléaires. Ces échelles peuvent être obtenues facilement par une étude, dans le cadre d'une approche de champ moyen, de la réponse d'un système infini à l'introduction de fluctuations de petite amplitude. Dans le cas nucléaire, nous avons obtenu (cf. Chap. 2) des échelles temporelles autour de 100-120 fm/c, tandis que les échelles de longueur autour de 10 fm conduisent à prédire typiquement la formation de fragments avec une masse proche de celle du Néon. Il faut remarquer que, du

point de vue expérimental, des temps similaires pour la production des fragments dans les collisions les plus centrales ont été estimés [Lou94, Dur95].

Avant de passer à l'étude d'un système nucléaire fini, nous avons voulu étudier plus certains aspects de notre approche, importants pour l'utilisation dans un cas réaliste:

1. - Nous avons montré (cf. §4.1) que, même dans le cas d'un système classique, la dynamique de la première phase de la fragmentation est dominée par les modes collectifs calculés dans le cadre de la réponse linéaire appliquée à la propagation de champ moyen correspondante: les modes du son zéro instable.
2. - Nous avons étudié l'effet de l'expansion du système sur les modes instables (cf. §4.2). Nous avons, en particulier, dérivé une relation de dispersion approchée, valide pour un système en faible expansion, et montré que son action sur les modes instables est limitée. En effet, nous avons conclu que l'expansion augmente légèrement la portée effective avec laquelle la relation de dispersion est calculée et donc augmente la longueur d'onde associée à la coupure ultra-violette. Le système, pour des vitesses d'expansion petites, va donc former des fragments selon les mêmes modes instables qui dominent dans la matière nucléaire statique. D'autre part, pour des vitesses d'expansion plus grandes, le système peut même ne pas avoir assez de temps pour développer les instabilités, avant de rejoindre des densités très basses, et peut se "vaporiser" directement. Ces résultats ont été confirmés par des simulations effectuées pour des systèmes à deux dimensions en expansion.
3. - Nous avons étudié aussi quel est l'effet de considérer de systèmes finis (cf. §4.3). Nous avons vu que, si d'un côté la création d'une surface a comme conséquence d'augmenter les phénomènes de coalescence entre les fragments, d'un autre côté, l'introduction d'une expansion et de la répulsion coulombienne peut réduire ou même éliminer cet effet.
4. - Finalement, nous avons étudié la possibilité d'une évolution chaotique de notre système plongé dans la région spinodale (cf. §4.4). Nous avons démontré que, dans une dynamique de champ moyen, la première phase de la formation de fragments par décomposition spinodale est dominée par une amplification linéaire des modes les plus instables prédits par la théorie de la réponse linéaire. Dans nos simulations cette première phase correspond à un intervalle de plusieurs temps caractéristiques τ_i du mode le plus instable. Le désordre commence à jouer un rôle après, quand les régions à haute densité créées durant la première phase commencent à interagir. Il est alors évident que si le processus de fragmentation est assez rapide, comme on l'attend pour un système en expansion par exemple, l'espace des phases ne pourrait pas être peuplé de façon chaotique.

Conclusions

L'utilisation des méthodes stochastiques pour un système nucléaire réaliste était à ce point-là de nos études possible. Nous avons d'abord pu vérifier (cf. §5.1) que la décomposition spinodale d'un tel système est en accord avec la relation de dispersion de la matière nucléaire infinie. En effet, une analyse multipolaire permet de mettre en évidence des partitions préférentielles du système dans lesquelles la distance moyenne entre les fragments est autour de 10 fm. De plus, le temps de formation des fragments est compatible avec les temps caractéristiques des modes les plus instables. Nous avons pu observer aussi que la décomposition spinodale conduit toujours, quelle que soit la forme initiale de la source, à la formation d'un trou au centre du système (cf. §5.1.2) et que la taille initiale joue, comme il était prévisible, sur le nombre moyen de fragments formés (cf. §5.1.1).

La conséquence attendue de ce biais dans les chemins possibles de fragmentation est une distribution en charge des fragments primaires avec des caractéristiques particulières: essentiellement la présence d'un pic autour de la charge 10 et le manque de petites charges. Ces caractéristiques peuvent être seulement partiellement gardées dans le processus d'évaporation successif (cf. §5.2) et peuvent difficilement être observées expérimentalement. C'est pour cela qu'il est nécessaire de chercher d'autres signatures possibles du phénomène. Nous avons proposé (§5.3) donc de regarder les caractéristiques des trois fragments les plus gros, moyennant les diagrammes de Dalitz et les distributions en charge de ces fragments. En effet, l'étude simultanée de ces observables permet de mettre en évidence au même temps la symétrie en charge entre les fragments et leurs tailles moyennes.

Finalement, nous avons effectué des simulations pour les sources obtenues dans les cas des réactions $Xe + Cu$ à 45 MeV/u et $Xe + Sn$ à 50 MeV/u, pour lesquelles une comparaison avec des données expérimentales était possible (cf. §5.5). Nos simulations ont montré dans les deux cas un très bon accord avec les données pour ce qui concerne les partitions des fragments, aussi bien que pour d'autres observables cinématiques et globales. Cet accord est encore plus intéressant quand on considère que des approches de multifragmentation statistique n'arrivent pas à reproduire aussi bien les mêmes données.

Une conclusion possible est que le scénario de multifragmentation par décomposition spinodale que nous proposons est applicable au moins dans les cas que nous avons étudié. Toutefois, avant de faire des affirmations concluantes il faudra éliminer toute ambiguïté dans les résultats expérimentaux et dans les résultats des simulations, mais surtout il faudra qu'aucun modèle, qui ne prévoit pas le passage du système par la région spinodale, ne soit capable de reproduire les données.

Néanmoins, dans l'attente de ces confirmations, nous pouvons quand même conclure et mettre l'accent sur le fait que ce modèle complètement dynamique, suivant l'évolution du système dès la première phase de la collision jusqu'à la

production de fragments, est capable, sans aucun paramètre ajustable, de bien reproduire des données expérimentales de multifragmentation. Il faut remarquer en effet que d'autres modèles, qui arrivent à reproduire des données expérimentales de multifragmentation, nécessitent l'utilisation de paramètres dont la signification physique n'est pas toujours évidente.

Ce travail ouvre la voie à des nouveaux développements théoriques, car il a démontré le pouvoir prédictif des approches stochastiques, quant au traitement du problème à N corps, y compris dans le cas de la transition de phase. La poursuite de ce travail nécessite une étude plus systématique des réactions en fonction de l'énergie de faisceau et des systèmes, pour pouvoir évaluer l'évolution des signatures proposées. Un travail de recherche, par exemple sur les corrélations, est aussi nécessaire pour pouvoir proposer d'autres observables accessibles expérimentalement. Et finalement une étude sur d'autres types d'instabilités, comme les instabilités de col, dont nous avons présenté ici une analyse qualitative (cf. §5.6), les instabilités de surface, les instabilités coulombiennes, ..., devra être entreprise.

A plus longs termes, les équations de champ moyen quantiques stochastiques, c'est-à-dire des extensions stochastiques de TDHF ou TDHFB, semblent être l'évolution souhaitable de l'approche semi-classique que nous avons utilisé. En effet, elles semblent non seulement éviter un certain nombre de difficultés numériques des approches semi-classiques, liées par exemple au traitement du terme de collisions, mais surtout elles permettent de traiter des caractéristiques essentielles des nucléons dans les noyaux telles la délocalisation de la fonction d'onde, les effets de couches, éventuellement les effets de pairing, etc. qui pourraient avoir des effets importantes sur les collisions entre ions lourds.

Bibliographie

- [Aic91] J. Aichelin: Phys. Rep. **202**, 233 (1991)
 - [Ayi88] S. Ayik et C. Grégoire: Phys. Lett. **B212**, 269 (1988)
 - [Ayi90] S. Ayik et C. Grégoire: Nucl. Phys. **A513**, 187 (1990)
 - [Ayi95] S. Ayik, M. Colonna et Ph. Chomaz: Phys. Lett. **B353**, 417 (1995)
 - [Ayi96] S. Ayik, Ph. Chomaz, M. Colonna et J. Randrup: à paraître sur Z. Phys. **A**
 - [Bal81] R. Balian et M. Vénéroni: Ann. Phys. **135**, 270 (1981)
 - [Bal93] M. Baldo, E.G. Lanza et A. Rapisarda: Chaos **3**, 691 (1993)
 - [Bal95] M. Baldo, G.F. Burgio et A. Rapisarda: Phys. Rev. **C51**, 198 (1995)
 - [Bau92] W. Bauer, G.F. Bertsch et H. Schulz: Phys. Rev. Lett. **69**, 1888 (1992)
 - [Ben92] B. Benhassine, M. Farine, E.S. Hernandez, D. Idier, B. Remaud et F. Sébille: Nucl. Phys. **A545**, 81c (1992)
 - [Ben95] José Benlliure: Thèse de Doctorat, Valencia (1995), version française GANIL-T-95 02
 - [Ber78] G.F. Bertsch et D. Munding: Phys. Rev. **C17**, 1646 (1978)
 - [Ber83] G.F. Bertsch et P.J. Siemens: Phys. Lett. **B126**, 9 (1983)
 - [Ber84] G.F. Bertsch, H. Kruse et S. Das Gupta: Phys. Rev **C29**, 673 (1984)
 - [Ber88] G.F. Bertsch et S. Das Gupta: Phys. Rep. **160**, 189 (1988)
 - [Bix69] M. Bixon et R. Zwanzig: Phys. Rev. **187**, 267 (1969)
 - [Bla76] J.P. Blaizot, D. Gogny et B. Grammaticos: Nucl. Phys. **A265**, 315 (1976)
 - [Bla95] J.P. Blaizot, J.F. Berger, J. Dechargé et M. Girod: Nucl. Phys. **A591**, 435 (1995)
 - [Boa88] D.M. Boal et J.N. Glosli: Phys. Rev. **C38**, 1870 (1988)
-

BIBLIOGRAPHIE

- [Bog46] N.N. Bogolyubov: J. Phys. (URSS) **10**, 256 (1946)
- [Bol72] L. Boltzmann: Wien, Ber. **66**, 275 (1872); *Lectures on Gas Theory*, trad. anglaise par S.Brush (University of California Press, 1964)
- [Bon76] P. Bonche, S. Koonin et J. Negele: Phys. Rev. **C13**, 226 (1976)
- [Bon85] J. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin, C.J. Pethick, H. Schulz et K. Sneppen: Nucl. Phys. **A443**, 321 (1985)
- [Bon94] A. Bonasera, F. Gulminelli et J. Molitoris: Phys. Rep. **243**, 1 (1994)
- [Bon95] J.P. Bondorf, A.S. Botvina, A.S. Iljinov, I.N. Mishustin et K. Sneppen: Phys. Rep. **257**, 133 (1995)
- [Bor46] H. Born et H.S. Green: Proc. Roy. Soc. **A188**, 10 (1946)
- [Bor93] B. Borderie, B. Remaud, M.F. Rivet et F. Sébille: Phys. Lett. B **302**, 15 (1993)
- [Bot86] W. Botermans et R. Malfliet: Phys. Lett. **B171**, 22 (1986)
- [Bro28] R. Brown: Edinburgh New. Phil. J. **5**, 358 (1828)
- [Bru92] M. Bruno *et al.*: Phys. Lett. **B292**, 251 (1992)
- [Bru94] M. Bruno *et al.*: Nucl. Phys. **A576**, 138 (1994)
- [Bur91] G.F. Burgio, Ph. Chomaz et J. Randrup: Nucl. Phys. **A529**, 157 (1991)
- [Bur94a] G.F. Burgio, B. Benhassine, B. Remaud et F. Sébille: Nucl. Phys. **A567**, 626 (1994)
- [Bur94b] G.F. Burgio, M. Baldo et A. Rapisarda: Phys. Lett. **B321**, 307 (1994)
- [Bur95] G.F. Burgio, Ph. Chomaz, M. Colonna et J. Randrup: Nucl. Phys. **A581**, 356 (1995)
- [Cha88] R. Charity, M.A. McMahan, G. Wozniak, R.J. McDonald, L.G. Moretto, D.G. Sarantites, L.G. Sobotka, G. Guarino, A. Pantaleo, L. Fiore, A. Gobbi et K.D. Hildenbrand: Nucl. Phys. **A483**, 371 (1988)
- [Cho91] Ph. Chomaz, G.F. Burgio et J. Randrup: Phys. Lett. **B254**, 340 (1991)
- [Cho94] Ph. Chomaz, M. Colonna, A. Guarnera et J. Randrup: Phys. Rev. Lett. **73**, 3512 (1994)
- [Col93] M. Colonna, G.F. Burgio, Ph. Chomaz, M. Di Toro et J. Randrup: Phys. Rev. **C47**, 1395 (1993)
- [Col94a] M. Colonna et Ph. Chomaz: Phys. Rev. **C49**, 1908 (1994)

-
- [Col94b] M. Colonna, Ph. Chomaz et J. Randrup: Nucl. Phys. **A567**, 637 (1994)
- [Col95a] M. Colonna, Ph. Chomaz, A. Guarnera et B. Jacquot: Phys. Rev. **C51**, 2671 (1995)
- [Col95b] M. Colonna, M. Di Toro et A. Guarnera: Nucl. Phys. **A589**, 160 (1995)
- [Col96a] M. Colonna, Ph. Chomaz et A. Guarnera: soumis à Nucl. Phys. **A**
- [Col96b] M. Colonna et Ph. Chomaz: à publier
- [Cug81] J. Cugnon, T. Mizutani et J. Vandermeulen: Nucl. Phys. **A 352**, 505 (1981)
- [Diu89] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet: *Physique Statistique* (Hermann, 1989)
- [Dor87] C. Dorso et J. Randrup: Phys. Lett. **B188**, 287 (1987)
- [Dur95] D. Durand et B. Tamain: cours donné à l'“Ecole Joliot-Curie”, 1995
- [Dur96a] D. Durand *et al*: *Evidence for the formation of toroidal structures in very central Pb+Au collisions at 29 MeV* soumis à Phys. Lett. **B**; Preprint LPCC-96-02
- [Dur96b] D. Durand: communication privée
- [Ein05] A. Einstein: Ann. Physik **17**, 549 (1905)
- [Ein06] A. Einstein: Ann. Physik **19**, 371 (1906)
- [Fel90] H. Feldmeier: Nucl. Phys. **A515**, 417 (1990)
- [Fok14] A.D. Fokker: Ann. Physik **43**, 810 (1914)
- [Fox78] G.C. Fox et S. Wolfram: Phys. Rev. Lett. **41**, 1581 (1978)
- [Fri83] W.A. Friedmann et W.G. Lynch: Phys. Rev. **C28**, 950 (1983)
- [Gil81] P.E. Gill, W. Murray et M.H. Wright: *Practical Optimization* (Academic Press, 1981)
- [Gre87] C. Grégoire, B. Remaud, F. Sébille et L. Vinet: Nucl. Phys. **A465**, 317 (1987)
- [Gro83] D.H.E. Gross: Phys. Scr. **T5**, 213 (1983)
- [Gro90] D.H.E. Gross: Rep. Prog. Phys. **53**, 605 (1990)
- [Gro92] D.H.E. Gross, Bao-An Li et A.R. De Angelis: Ann. Phys. **1**, 467 (1992)
- [Gua96a] A. Guarnera, M. Colonna et Ph. Chomaz: Phys. Lett. **B373**, 267 (1996)
-

BIBLIOGRAPHIE

- [Gua96b] A. Guarnera, Ph. Chomaz et M. Colonna: in actes du "XXXIV Winter Meeting on Nuclear Physics", Bormio (Italie) édités par I.Iori (Ricerca Scientifica ed Educazione Permanente, Milano, 1996); Preprint GANIL-P-96-05
- [Gun83] J.D. Gunton, M. San Miguel et P.S. Sahni: *Phase transition and critical phenomena*, (Academic Press, New York, 1983) vol.8
- [Hei90] H. Heiselberg, C.J. Pethick et D.G. Ravenhall: Nucl. Phys. **A519**, 279c (1990)
- [Jac95] B. Jacquot, M. Colonna, Ph. Chomaz et A. Guarnera: Phys. Lett. **B359**, 268 (1995)
- [Jac96a] B. Jacquot, A. Guarnera, Ph. Chomaz et M. Colonna: à paraître sur Phys. Lett. **B**
- [Jac96b] B. Jacquot, A. Guarnera, Ph. Chomaz et M. Colonna: soumis à Phys. Rev. **C**
- [Jac96c] Bertrand Jacquot: Thèse de Doctorat, GANIL-Caen (1996)
- [Kir56] J.G. Kirkwood: J. Chem. Phys. **14**, 180 (1946)
- [Koo87] S.E. Koonin et J. Randrup: Nucl. Phys. **A471**, 355c (1987)
- [Kru85] H. Kruse, B.V. Jacak et H. Stocköcker: Phys. Rev. **C31**, 1770 (1985)
- [Lan08] P. Langevin: Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **146**, 530 (1908)
- [Lat94] V. Latora, M. Belkacem et A. Bonasera: Phys. Rev. Lett. **73**, 1765 (1994)
- [Lec95] J.F. Lecoilley *et al.*: Phys. Lett. **B354**, 202 (1995)
- [Len89] R.J. Lenk et V.R. Pandharipande: Phys. Rev. **C39**, 2242 (1989)
- [Len90] R.J. Lenk, T.J. Schlagel et V.R. Pandharipande: Phys. Rev. **C42**, 372 (1990)
- [Lop89] J.A. Lopez et J. Randrup: Nucl. Phys. **A503**, 183 (1989)
- [Lou94] M. Louvel *et al.*: Phys. Lett. **B320**, 221 (1994)
- [Luk96] J. Lukasik *et al.*: in actes du "XXXIV Winter Meeting on Nuclear Physics", Bormio (Italie) édités par I.Iori (Ricerca Scientifica ed Educazione Permanente, Milano, 1996); Preprint IPNO-DRE-96-04
- [Lyn95] W.G. Lynch: Nucl. Phys. **A583**, 471c (1995)
- [Mar95] Nathalie Marie: Thèse de Doctorat, Ganil-Caen (1995), GANIL-T-95 04
- [Mag56] W. Magnus: Comm. Pure Appl. Math. **7**, 649 (1956)

- [Mon94] C.P. Montoya et al.: Phys. Rev. Lett. **73**, 3070 (1994)
- [Mor92] L.G. Moretto, Kin Tso, N. Colonna et G.J. Wozniak: Phys. Rev. Lett. **69**, 1884 (1992)
- [Mor93] L.G. Moretto et G.J. Wozniak: Ann. Rev. Nucl. Part. Sc. **43**, 379 (1993)
- [Neg82] J.W. Negele: Rev. Mod. Phys. **54**, 912 (1982)
- [Nor28] L.W. Nordheim: Proc. Roy. Soc. **A119**, 689 (1928)
- [Ono92] A. Ono, H. Horiuchi, T. Maruyama et A. Ohnishi: Phys. Rev. Lett. **68**, 2898 (1992)
- [Ott93] E. Ott: *Chaos in dynamical systems*, (Cambridge Univ. Press, 1993)
- [Pau25] W. Pauli: Z. Physik **31**, 765 (1925)
- [Pei92] G. Peilert, J. Konopka, H. Stöcker, W. Greiner, M. Blann et M.G. Mustafa: Phys. Rev. **C46**, 1457 (1992)
- [Pet88] C.J. Pethick et D.G. Ravenhall: Ann. Phys. (N.Y.) **183**, 131 (1988)
- [Pin89] P. Pines et D. Nozières: *The theory of quantum liquids*, (Addison-Wesley, 1989) vol.I
- [Pla17] M. Planck: Sitzber. Preuß. Akad. Wiss., p.324 (1917)
- [Pra95] S. Pratt, C. Montoya et F. Ronning: Phys. Lett. **B349**, 261 (1995)
- [Ran90] J. Randrup et B. Remaud: Nucl. Phys. **A514**, 339 (1990)
- [Ran82] J. Randrup: Nucl. Phys. **A383**, 486 (1982)
- [Ran87] J. Randrup et R. Vandenbosch: Nucl. Phys. **A474**, 219 (1987)
- [Ran94] J. Randrup et S. Ayik: Nucl. Phys. **A572**, 489 (1994)
- [Rei65] F. Reif: *Fundamentals of statistical and thermal physics* (McGraw-Hill, 1965)
- [Rem84] B. Remaud, F. Sébille, C. Grégoire et F. Scheuter: Nucl. Phys. **A428**, 101 (1984)
- [Rin80] P. Ring et P. Schuck: *The nuclear many body problem* (Springer-Verlag, 1980)
- [Ris84] H. Risken: *The Fokker-Plank Equation*, (Springer-Verlag, 1984)
- [Sky56] T.H.R. Skyrme: Phil. Mag. **1**, 1043 (1956)
-

BIBLIOGRAPHIE

- [Sto96] N.T.B. Stone *et al.*: in actes du "XII Winter Workshop on Nuclear Dynamics", Snowbird (Utah) édités par W.Bauer et G.D. Westfall (Plenum, 1996)
- [Stu92] L. Stuttgé *et al.*: Nucl. Phys. **A539**, 511 (1992)
- [Tab89] M. Tabor: *Chaos and integrability in non-linear dynamics*, (J. Wiley and Sons, 1989)
- [Tök95] J. Töke *et al.*: Phys. Rev. Lett. **75**, 2920 (1995)
- [Ueh33] E.A. Uehling et G.E. Uhlenbeck: Phys. Rev. **43**, 552 (1933)
- [Vau72] D. Vautherin et D. Brink: Phys. Rev. **C5**, 626 (1972)
- [Vau86] D. Vautherin et M. Vénéroni: Proc. "First International Spring Seminar on Nuclear Physics" (Sorrento - Italie, 1986) pag.13
- [Vla38] A.A. Vlasov: JEPT **8**, 291 (1938)
- [Waa73] J.D. van der Waals: *Over de Continuïteit van den Gas en Vloeistoestand* (Thèse, Leiden, 1873)
- [Won82] C.Y. Wong: Phys. Rev. **C25**, 1460 (1982)
- [Xu93] X.M. Xu, J.B. Natowitz, C.A. Gagliardi, R.E. Tribble, C.Y. Wang et W.G. Lynch: Phys. Rev. **C48**, 933 (1993)

Résumé

Une perspective qui s'est ouverte pour la physique nucléaire dans les dernières années, avec la mise en évidence de phénomènes tels que la multifragmentation ou la vaporisation, est la possibilité d'observer une transition de phase dans la matière nucléaire. Une explication proposée de la multifragmentation est la décomposition spinodale: le passage du système à travers une zone du diagramme des phases, la région spinodale, dans laquelle la matière nucléaire n'est plus stable. Ce mémoire traite ce processus dans le cadre théorique d'une approche de champ moyen stochastique. Nous avons montré que ce type d'approche, dans laquelle la fonction de distribution à un corps peut avoir une évolution aléatoire, est capable de bien décrire des phénomènes dans lesquels corrélations et fluctuations jouent un rôle important, comme dans le cas d'une transition de phase du premier ordre. Dans le cadre d'une approche de champ moyen stochastique, nous avons montré que la production de fragments par décomposition spinodale est caractérisée par des temps typiques (de l'ordre d'une centaine de fm/c) et par des tailles typiques (autour de la masse du Néon). Nous avons montré que ces caractéristiques sont assez robustes et qu'elles ne sont pas affectées de façon importante par une éventuelle expansion du système ou par la taille finie des noyaux. Nous avons proposé de chercher de telles caractéristiques dans les partitions des fragments les plus gros. L'étude et la comparaison avec les données expérimentales, effectuées pour les réactions $\text{Xe} + \text{Cu}$ à 45 MeV/A et $\text{Xe} + \text{Sn}$ à 50 MeV/A, ont montrés un très bon accord qui est d'autant plus remarquable que les théories que nous avons développées ne contiennent aucun paramètre ajustable. Ces résultats constituent une indication forte sur la possibilité d'observer une décomposition spinodale dans les noyaux.

Abstract

In the last decade nuclear physics research has found, with the observation of phenomena such as multifragmentation or vaporization, the possibility to get a deeper insight into the nuclear matter phase diagram. For example, a spinodal decomposition scenario has been proposed to explain the multifragmentation: because of the initial compression, the system may enter a region, the spinodal zone, in which the nuclear matter is no longer stable, and so any fluctuation leads to the formation of fragments. This thesis deals with spinodal decomposition within the theoretical framework of stochastic mean field approaches, in which the one-body density function may experience a stochastic evolution. We have shown that these approaches are able to describe phenomena, such as first order phase transitions, in which fluctuations and many-body correlations play an important role. In the framework of stochastic mean-field approaches we have shown that the fragment production by spinodal decomposition is characterized by typical time scales of the order of 100 fm/c and by typical size scales around the Neon mass. We have also shown that these features are robust and that they are not affected significantly by a possible expansion of the system or by the finite size of nuclei. We have proposed as a signature of the spinodal decomposition some typical partition of the largest fragments. The study and the comparison with experimental data, performed for the reactions $\text{Xe} + \text{Cu}$ at 45 MeV/A and $\text{Xe} + \text{Sn}$ at 50 MeV/A, have shown a remarkable agreement. Moreover we would like to stress that the theory does not contain any adjustable parameter. These results seem to give a strong indication of the possibility to observe a spinodal decomposition of nuclei.

Mots-clés

Collision entre ions lourds
Multifragmentation
Décomposition spinodale
Instabilités

Champ moyen stochastique
Equation de Boltzmann-Langevin
Fluctuations
Réponse linéaire